Wh:

$|\psi\rangle$ "ket"

$\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ bra-c-ket

abstrakter Zustand, der das quantenmechanische Systems beschreibt

$\psi(\underline{r}) = \langle\underline{r}|\psi\rangle$ Projektion von $|\psi\rangle$ auf die „Ortsbasis"

$\tilde{\psi}(\underline{p}) = \langle\underline{p}|\psi\rangle$ Projektion auf die „Impulsbasis"

$$\int d\underline{r}\, |\underline{r}\rangle\langle\underline{r}| = \hat{1}$$

Vollständigkeitsrelation für die Ortsbasis

$$\int d\underline{p}\, |\underline{p}\rangle\langle\underline{p}| = \hat{1}$$

$$\underbrace{\langle\underline{r}|\psi\rangle}_{\psi(\underline{r})} = \langle\underline{r}|\hat{1}|\psi\rangle$$

„Einschieben einer Eins"

$$= \langle\underline{r}|\int d\underline{p}\, |\underline{p}\rangle\langle\underline{p}|\psi\rangle$$

$$= \int d\underline{p}\, \langle\underline{r}|\underline{p}\rangle\, \tilde{\psi}(\underline{p})$$

Vergleiche mit entsprechendem Ausdruck aus der Fouriertransformation

$$\langle\underline{r}|\underline{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$$

II.2. Axiome des Hilbertraums $\mathcal{H}$

i) $\mathcal{H}$ ist ein linearer, unitärer Vektorraum

$|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ Vektoren in $\mathcal{H}$

$|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$ ist auch Element von $\mathcal{H}$

$$\underbrace{\lambda_1 |\psi_1\rangle}_{\substack{\text{Vektor parallel} \\ \text{zu } |\psi_1\rangle}} + \lambda_2 |\psi_2\rangle \in \mathcal{H} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

außerdem:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_2)|\psi\rangle &= \lambda_1 |\psi\rangle + \lambda_2 |\psi\rangle \\ \lambda(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) &= \lambda |\psi_1\rangle + \lambda |\psi_2\rangle \end{aligned}\right\} \text{Distributivgesetz}$$

$$\lambda(\mu |\psi\rangle) = (\lambda\mu)|\psi\rangle \qquad \text{Assoziativgesetz}$$

$\exists$ Nullelement:

$$|\psi\rangle + |0\rangle = |\psi\rangle$$

$\exists$ Inverses: $|\psi\rangle + |-\psi\rangle = |0\rangle$

Lineare Unabhängigkeit

Mehrere Vektoren $|\psi_i\rangle$ $(i=1..k)$ heißen linear unabhängig, wenn aus $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i |\psi_i\rangle = 0$ folgt $\lambda_i = 0$

Seien die Vektoren $|b_i\rangle$ Basisvektoren, d.h. Vektoren, die den Hilbertraum vollständig aufspannen

$\Rightarrow$ Jedes $|\psi\rangle$ kann dargestellt werden als $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{k} c_i |b_i\rangle$

ii) Skalarprodukt

Definition: Multiplikation eines „bra-Vektor" mit einem ket-Vektor: $\langle\psi_1|\psi_2\rangle \in \mathbb{C}$

Eigenschaften:

- linear: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\langle\psi|\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2\rangle = \langle\psi|\lambda_1\psi_1\rangle + \langle\psi|\lambda_2\psi_2\rangle$$
$$= \lambda_1\langle\psi|\psi_1\rangle + \lambda_2\langle\psi|\psi_2\rangle$$

- hermitesch

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle^*$$

Bemerkungen: - Das hatten wir schon bei der Diskussion der $\underline{r}$- und $\underline{p}$-Darstellung

$$\langle \underline{r} | \underline{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$$

$$= \langle \underline{p} | \underline{r} \rangle^*$$

- speziell: $|\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \Rightarrow \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle^*$

$\Rightarrow \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle$ ist reell!

- positiv definit

$$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$$

Weitere Folgerung aus der Hermitezität des Skalarprodukts

$$\langle \lambda \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \lambda \psi_1 \rangle^* = \left(\lambda \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \right)^*$$

$\lambda \in \mathbb{C}$

$$= \lambda^* \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle^* = \lambda^* \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

man muß also aufpassen, auf welcher Seite des Skalarprodukts die Zahlen λ stehen!

(i.A. komplexen)

- $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$ und $|\psi_1\rangle \neq |\psi_2\rangle$

$\Rightarrow |\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ heißen orthogonal

Orthonormalbasis:

$\hat{=}$ Basis von auf 1 normierten Vektoren, die orthogonal zueinander sind!

- Norm eines Zustands:

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$$

analog im $\mathbb{R}^2$

$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}\cdot\underline{a}}$

Eigenschaften der Norm:

$$\|\lambda\psi\| = \sqrt{\langle\lambda\psi|\lambda\psi\rangle} = \sqrt{\underbrace{\lambda\lambda^*}_{|\lambda|^2}\langle\psi|\psi\rangle} = |\lambda|\,\|\psi\|$$

- Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle| \leq \|\psi_1\|\,\|\psi_2\|$$

$\rightarrow$ Übung

- Dreiecksungleichung

$$\|\psi_1 + \psi_2\| \leq \|\psi_1\| + \|\psi_2\| \quad *$$

aus ⊛ folgt zunächst:

$$\|\psi_1+\psi_2\|^2 \leq (\|\psi_1\|+\|\psi_2\|)^2$$
$$= \|\psi_1\|^2+\|\psi_2\|^2+2\,\|\psi_1\|\,\|\psi_2\| \quad (**)$$

zeige nun (**)

$$\|\psi_1+\psi_2\|^2 = \langle\psi_1+\psi_2|\psi_1+\psi_2\rangle$$
$$= \langle\psi_1|\psi_1\rangle+\langle\psi_1|\psi_2\rangle+\underbrace{\langle\psi_2|\psi_1\rangle}_{\langle\psi_1|\psi_2\rangle^*}+\langle\psi_2|\psi_2\rangle$$
$$= \|\psi_1\|^2+\|\psi_2\|^2+2\,\mathrm{Re}\,\langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

benutze

$$\mathrm{Re}\,\langle\psi_1|\psi_2\rangle \leq |\langle\psi_1|\psi_2\rangle| = \sqrt{(\mathrm{Re}\langle\psi_1|\psi_2\rangle)^2+(\mathrm{Im}\langle\psi_1|\psi_2\rangle)^2}$$

$$\Rightarrow \|\psi_1+\psi_2\|^2 \leq \|\psi_1\|^2+\|\psi_2\|^2+2\,|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|$$

benutze Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle| \leq \|\psi_1\|\,\|\psi_2\|$$

$$\Rightarrow \|\psi_1+\psi_2\|^2 \leq \|\psi_1\|^2+\|\psi_2\|^2+2\,\|\psi_1\|\,\|\psi_2\|$$

q.e.d.

<u>Beispiele:</u>

Orts- und Impulsdarstellung

$$\psi(\underline{r}) = \langle\underline{r}|\psi\rangle\ ,\quad \Phi(\underline{p}) = \langle\underline{p}|\psi\rangle$$

Skalarprodukt

Skalarprodukt zweier beliebiger Zustände in der Orts- und Impulsdarstellung

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\hat{1}|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\underbrace{\int d\underline{r}\,|\underline{r}\rangle\langle\underline{r}|}_{\hat{1}}|\psi_2\rangle$$

$$= \int d\underline{r}\,\langle\psi_1|\underline{r}\rangle\langle\underline{r}|\psi_2\rangle$$

$$= \int d\underline{r}\,\langle\underline{r}|\psi_1\rangle^*\langle\underline{r}|\psi_2\rangle$$

$$= \int d\underline{r}\,\psi_1^*(\underline{r})\,\psi_2(\underline{r})$$

analog:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int d\underline{p}\,\tilde{\psi}_1^*(\underline{p})\,\tilde{\psi}_2(\underline{p})$$

Norm:

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$$

$$= \sqrt{\int d\underline{r}\,|\psi(\underline{r})|^2} = \sqrt{\int d\underline{p}\,|\tilde{\psi}(\underline{p})|^2}$$

---

nochmal zur Orts- und Impulsdarstellung als „Basis"

$$\langle\underline{r}'|\underline{r}\rangle = \langle\underline{r}'|\hat{1}|\underline{r}\rangle$$

mit $\hat{1} = \int d\underline{p}\,|\underline{p}\rangle\langle\underline{p}|$

$$= \int d\underline{p}\,\langle\underline{r}'|\underline{p}\rangle\langle\underline{p}|\underline{r}\rangle$$

$$\int d\underline{r}\,\psi_2(\underline{r})\,\psi_1^*(\underline{r})$$

$$\left(\int d\underline{r}\,\psi_2^*\,\psi_1\right)^*$$

$$\langle\psi_2|\psi_1\rangle^* = \langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

$$= \int d\underline{p}\; e^{i/\hbar\, \underline{p}\cdot\underline{r}'} \cdot e^{-i/\hbar\, \underline{p}\cdot\underline{r}} \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\underline{p}\; e^{i/\hbar\, \underline{p}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')} \qquad \underline{p} = \hbar \underline{k}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\underline{k}\; e^{i\underline{k}\cdot(\underline{r}'-\underline{r})} = \delta(\underline{r}'-\underline{r})$$

$$\Rightarrow \langle \underline{r}' | \underline{r} \rangle = \delta(\underline{r}' - \underline{r})$$

Die $\underline{r}$-Darstellung bildet eine kontinuierliche Basis aus orthogonalen Vektoren!

analog:

$$\langle \underline{p}' | \underline{p} \rangle = \dots\dots = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\underline{r}\; e^{i\underline{r}\cdot(\underline{k}-\underline{k}')}$$

$$= \frac{1}{\hbar^3}\, \delta(\underline{k}'-\underline{k}) = \delta(\underline{p}'-\underline{p})$$

(iii) Besondere Eigenschaften des Hilbertraumes

$\Rightarrow$ s. Buch von Eigen Fick
Grundlagen der Quantentheorie

$\Rightarrow$ Mathemat. Physik

- $\mathcal{H}$ ist ein unitärer Vektorraum, der <u>vollständig</u> ist:

Der Grenzwert jeder „Cauchy-Folge" von Zuständen liegt ~~wie~~ in $\mathcal{H}$

Eine Folge heißt Cauchyfolge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$\|\psi_m - \psi_n\| < \varepsilon \quad \forall\, n,m > n_0$$

„Metrik" und $\varepsilon > 0$

„Abstand der Zustände"

- $\mathcal{H}$ ist separabel

- Dirac-Vektoren

„Uneigentliche Vektoren"

Beispiele: $|\underline{r}\rangle$, $|\underline{p}\rangle$

Basis-Vektoren der Orts- bzw. Impulsdarstellung

Warum „uneigentlich"?

- gewöhnliche (eigentliche) Zustände sind normiert

$$\underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{\|\psi\|^2} = 1$$

- Dirac-Vektoren:

normiert, falls

$$\langle d_k | d_{k'} \rangle = \delta(k - k')$$

k kontinuierlicher Index

Bsp: $\langle \underline{r}' | \underline{r} \rangle = \delta(\underline{r}' - \underline{r})$

$\langle p' | p \rangle = \delta(p' - p)$

aber: $\langle \underline{r} | \psi \rangle = \psi(\underline{r})$

Erweiterter Hilbertraum

Raum der eigentlichen und uneigentlichen Zustandsvektoren!