Schrödingerbild: Zeitabhängigkeit der Zustände

$$i\hbar\,|\dot{\psi}(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle$$

Heisenbergbild

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$$

↑ unitär!

$$\underbrace{|\psi_H\rangle}_{\text{zeitl. konstant}} = \overbrace{\hat{U}^{-1}(t,t_0)}^{\hat{U}^+(t,t_0)}\,|\psi(t)\rangle \quad , \quad \hat{A}_H(t) = \hat{U}^+(t,t_0)\,\hat{A}\,\hat{U}(t,t_0)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_H(t)$$

vergl.

Ehrenfest-Theorem: $\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\rangle$

beachte: Erwartungswerte sind bildunabhängig!

V.5. Dirac-Bild (Wechselwirkungsbild)

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \underbrace{\hat{H}_1(t)}$$

$\boxed{\text{Sowohl Zustände als auch Observablen sind zeitabhängig!}}$

Wechselwirkungsterm („Störung")
z.B. oszillierendes $\underline{E}$-Feld oder $\underline{B}$-Feld

Observablen

$$\hat{A}_D(t) = \hat{U}_0^+(t,t_0)\,\hat{A}\,\hat{U}_0(t,t_0)$$

Zeitentwicklungsoperator im Schrödingerbild zum Hamiltonian $\hat{H}_0$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{A}_D(t) = e^{i/\hbar\,\hat{H}_0(t-t_0)}\,\hat{A}\,e^{-i/\hbar\,\hat{H}_0(t-t_0)}}$$

beachte: $\hat{H}_0$ ist per definitionem zeitunabhängig!

$$\hat{U}_0(t,t_0) = \hat{U}_0(t-t_0) = e^{-i/\hbar\,\hat{H}_0(t-t_0)}$$

$$\frac{d\hat{A}_D(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\hat{H}_0\hat{A}_D(t) + \underbrace{\hat{U}_0^+\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{U}_0}_{=:\frac{\partial\hat{A}_D}{\partial t}} - \frac{i}{\hbar}\underbrace{\hat{U}_0^+\hat{A}\underbrace{\hat{H}_0\hat{U}_0}_{\hat{U}_0\hat{H}_0}}_{\hat{A}_D(t)\hat{H}_0}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\hat{A}_D(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}_0,\hat{A}_D(t)] + \frac{\partial\hat{A}_D(t)}{\partial t}\\ &= \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}_D(t),\hat{H}_0] + \frac{\partial\hat{A}_D(t)}{\partial t}\end{aligned}}$$

Dynamik der Observablen ist durch $\hat{H}_0$ bestimmt

(Unterschied zum Heisenbergbild: Dort wird $\hat{A}_H(t)$ durch den vollen Hamiltonian bestimmt)

Zustände im Dirac-Bild

definiere: $|\Psi_D(t)\rangle = \underbrace{\hat{U}_0(t_0,t)}_{\hat{U}_0^+(t,t_0)} |\Psi(t)\rangle$ Zustand im Schrödingerbild zur Zeit t

(denn: $\hat{U}_0(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)}$)

Zeitentwicklung

$$|\dot{\Psi}_D(t)\rangle = \frac{\partial}{\partial t}|\Psi_D(t)\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{U}_0(t_0,t)\right)|\Psi(t)\rangle + \hat{U}_0(t_0,t)\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle$$

benutze: $\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_0(t_0,t) = \frac{i}{\hbar}\hat{H}_0\hat{U}_0(t_0,t)$ und $\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle \underset{SG}{=} \frac{1}{i\hbar}\hat{H}|\Psi(t)\rangle$

$$\Rightarrow |\dot{\Psi}_D(t)\rangle = \frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 \underbrace{\hat{U}_0(t_0,t)}_{\substack{\hat{U}_0^+(t,t_0)\\ \hat{U}_0^+}} |\Psi(t)\rangle - \frac{i}{\hbar}\underbrace{\hat{U}_0(t_0,t)}_{\hat{U}_0^+}\hat{H}|\Psi(t)\rangle \Big| \cdot i\hbar$$

$$i\hbar|\dot{\Psi}_D(t)\rangle = (-\underbrace{\hat{H}_0\hat{U}_0^+}_{\hat{U}_0^+\hat{H}_0} + \hat{U}_0^+\hat{H})|\Psi(t)\rangle$$

$$= (-\hat{U}_0^+\hat{H}_0 + \hat{U}_0^+\hat{H})|\Psi(t)\rangle$$

benutze: • $|\psi_D(t)\rangle = \hat{U}_0(t_0,t)|\psi(t)\rangle$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \hat{U}_0^{-1}(t_0,t)|\psi_D(t)\rangle$$
$$= \hat{U}_0(t,t_0)|\psi_D(t)\rangle$$

• $\hat{H} - \hat{H}_0 = \hat{H}_1(t)$
Wechselwirkungsterm

$$\boxed{i\hbar|\dot{\psi}_D(t)\rangle = \hat{H}_{1,D}(t)|\psi_D(t)\rangle}$$

mit $\hat{H}_{1,D}(t) = \hat{U}_0^+ \hat{H}_1(t)\hat{U}_0$

sieht <u>formal</u> wie die gewöhnliche SG aus!

Konkret: Die Dynamik der Zustände im Dirac-Bild ist durch den „Wechselwirkungsterm" $\hat{H}_1(t)$ bestimmt!

Dirac-Bild wird besonders wichtig bei der sog. zeitabhängigen Störungstheorie (Atome in Lichtfeldern)
$\rightarrow$ s. Ende der VL

VI. Quantentheorie des Drehimpulses

VI.1. Der Drehimpulsoperator

Klassischer Drehimpuls: $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} \Rightarrow$

$$L_x = yp_z - zp_y$$
$$L_y = zp_x - xp_z$$
$$L_z = xp_y - yp_x$$

Übergang zur QM (Korrespondenzprinzip)

$\underline{r} \rightarrow \hat{\underline{r}}$, $\underline{p} \rightarrow \hat{\underline{p}}$ und $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$

$\Rightarrow$ Drehimpulsoperator: $\underline{\hat{L}} = \underline{\hat{r}} \times \underline{\hat{p}}$

(genauer: Bahndrehimpulsoperator)!

es gibt einen weiteren Drehimpuls, den Spin!

Eigenschaften

i) $\underline{\hat{L}}$ ist hermitesch: z.B. $\hat{L}_x^+ = (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)^+$

$= \hat{p}_z^+ \hat{y}^+ - \hat{p}_y^+ \hat{z}^+$

da $\underline{\hat{p}}, \underline{\hat{r}}$ hermitesch $\rightarrow = \hat{p}_z \hat{y} - \hat{p}_y \hat{z}$

$\rightarrow = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \hat{L}_x$!

da verschiedene Komponenten von $\underline{\hat{r}}$ und $\underline{\hat{p}}$ vertauschen!

ii) $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = [\underbrace{(\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)}_{\hat{L}_x}, \underbrace{(\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z)}_{\hat{L}_y}] = \ldots = i\hbar \hat{L}_z$

2./3. Übungszettel

allgemein:

(*) $\boxed{[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \hat{L}_k}$ mit (i,j,k) zyklisch

- die ~~[illegible]~~ Komponenten des Drehimpulses vertauschen nicht (d.h. sie sind nicht gleichzeitig scharf messbar!)

und man kann kein gemeinsames System aus Eigenzuständen finden!

- Ganz allgemein heißen Operatoren mit Vertauschungsrelationen dieser Art (*) „Drehimpulsoperatoren" in der QM

$\Rightarrow$ Spin $\underline{\hat{S}}$ genügt analogen Relationen!

$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \hat{S}_k$

iii) es gilt:

$$[\hat{\underline{L}}^2, \hat{L}_i] = 0 \quad \forall i = 1,2,3$$

mit $\hat{\underline{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$

d.h. $\hat{\underline{L}}^2$ und jedes $\hat{L}_i$ besitzen gemeinsame Eigenzustände und sind gleichzeitig scharf meßbar!

typischerweise betrachtet man als relevante Komponente die z-Komponente $\hat{L}_z$

$$[\underline{L}^2, \hat{L}_z] = 0 \qquad \text{(reine Konvention)}$$

iv) Leiteroperatoren

↳ werden benutzt zur Lösung des Eigenwertproblems von $\underline{L}^2$ und $\hat{L}_z$ (wie beim harmon. Oszillator!)

definiere:

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y$$

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y$$

da $\hat{L}_i = \hat{L}_i^+$ für $i = x, y, z$

damit:

$$(\hat{L}_+)^+ = \hat{L}_x^+ - i\hat{L}_y^+ = \hat{L}_x - i\hat{L}_y = \hat{L}_-$$

$$(\hat{L}_-)^+ = \hat{L}_x^+ + i\hat{L}_y^+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y = \hat{L}_+$$

die Leiteroperatoren sind nicht hermitesch!

Vertauschungsrelation:

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = [(\hat{L}_x + i\hat{L}_y), (\hat{L}_x - i\hat{L}_y)]$$

$$= \cancel{[\hat{L}_x, \hat{L}_x]} - i\underbrace{[\hat{L}_x, \hat{L}_y]}_{i\hbar\hat{L}_z} + i\underbrace{[\hat{L}_y, \hat{L}_x]}_{-i\hbar\hat{L}_z} + \cancel{[\hat{L}_y, \hat{L}_y]}$$

$$= 2\hbar\hat{L}_z$$

außerdem:

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar \hat{L}_\pm \quad ; \quad [\hat{\underline{L}}^2, \hat{L}_\pm] = 0$$

da $\hat{\underline{L}}^2$ mit jeder Komponente ~~von~~ L_i vertauscht

IV. 2. Das Eigenwertproblem des Drehimpulses

Wir wissen bereits: $[\hat{\underline{L}}^2, \hat{L}_z] = 0$

$\Rightarrow$ suche gemeinsamen Eigenzustände (EZ) von $\hat{\underline{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ sowie die zugehörigen Eigenwerte (EW)

$$\hat{\underline{L}}^2 |\alpha, \beta\rangle = \alpha |\alpha, \beta\rangle \qquad \langle\alpha', \beta'|\alpha, \beta\rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'}$$

$$\hat{L}_z |\alpha, \beta\rangle = \beta |\alpha, \beta\rangle$$

d.h. wir charakterisieren die EZ durch zwei „Quantenzahlen" α und β

„Hintergedanke": $\hat{\underline{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ bilden einen vollständigen Satz kommutierender Observablen!

Eine erste Aussage zu den α, β kann man sofort machen:

$\hat{\underline{L}}$ hermitesch $\rightarrow$ $\hat{\underline{L}}^2$ hermitesch

$$\Rightarrow \langle\alpha,\beta|\underbrace{\hat{L}^2|\alpha,\beta\rangle}_{\alpha|\alpha,\beta\rangle} = \alpha \underbrace{\langle\alpha,\beta|\alpha,\beta\rangle}_{1} = \alpha$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \langle\alpha,\beta|\underbrace{\hat{L}_i^2}_{\hat{L}_i\hat{L}_i}|\alpha,\beta\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\underbrace{\langle\hat{L}_i\alpha,\beta|\hat{L}_i\alpha,\beta\rangle}_{\langle\phi_i|\phi_i\rangle}}_{\geq 0} \quad \text{mit } |\phi_i\rangle = \hat{L}_i|\alpha,\beta\rangle$$

d.h. $\alpha \geq 0$!

jeder Summand ist positiv!

$$\geq \underbrace{\langle\alpha,\beta|\hat{L}_z^2|\alpha,\beta\rangle}_{\beta^2}$$

benutze $\hat{L}_z|\alpha,\beta\rangle = \beta|\alpha,\beta\rangle$

Folgerung: $\boxed{\alpha \geq \beta^2 \geq 0} \Leftrightarrow \boxed{-\sqrt{\alpha} \leq \beta \leq \sqrt{\alpha}}$