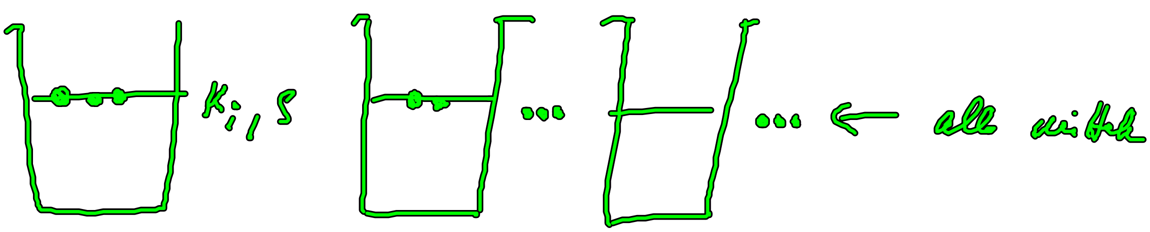
3.4.2. Mittlere Besetzungszahl bei Quantengasen

suche die Besetzungszahl (mittlere Teilchenzahl n_{ks} im Einteilchenzustand $|n_{ks}\rangle$):

$$\langle \hat{n}_{ks} \rangle = Sp(\hat{n}_{ks}\, \rho)$$

$$= \frac{1}{Z_{gk}} \sum_n \langle n| \cdot \hat{n}_{ks}\, e^{-\beta(H-N)} |n\rangle$$



wieviele Teilchen sind im Mittel im k-ten Zustand

a) Fermionen

$$\langle \hat{n}_{ks} \rangle = \frac{1}{Z_{gk}} \cdots \left(\sum_{n_{ks}=0}^{1} n_{ks}\, e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)\, n_{ks}} \right) \cdots$$

sieht aus wie Berechn. d. Zustandssumme

alle anderen „k“ „s“ analog Rechn. zu Zustandssumme (ohne „n_{ks}“)

$$= \frac{\cancel{\cdots} \left(\sum_{n_{ks}=0}^{1} n_{ks}\, e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu) n_{ks}} \right) \cancel{\cdots}}{\cancel{\cdots} \left(\sum_{n_{ks}=0}^{1} e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu) n_{ks}} \right) \cancel{\cdots}} \leftarrow \text{kürzen}$$

$$= \partial_{\beta\mu} \ln \left(\sum_{n_{ks}=0}^{1} e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu) n_{ks}} \right)$$

$$= \partial_{\beta\mu} \ln \left(1 + e^{-\underline{\beta}(\varepsilon_k-\underline{\mu})} \right)$$

$$= \frac{e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}}{1+e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}+1}$$

b) <u>analoge Rechng. f. Bosonen:</u> , nur $n_{ks} = 0, 1 \cdots \infty$

$$\langle \hat{n}_{ks} \rangle = \partial_{\beta\mu} \ln \left(\frac{1}{1-e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}} \right)$$

$$= + \frac{e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}}{1-e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1}$$

Die mittlere Besetzungszahl für Fermion / Boson heißt

Fermi- bzw. Bose-Verteilung und ist:

$$f_k^{F/B} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)} \pm 1} .$$

$\uparrow_{\varepsilon_k,\ \varepsilon}$

3.4.3. Diskussion der mittleren Besetzungszahl

a) Interpretation $f^{F/B}$: mittlere Zahl von Teilchen im Einteilchenzustand der Wellenzahl k_i (n_i) bzw. der Energie ε

b) klassischer Grenzfall: $\mu \to -\infty$ (geringe Teilchendichte $n_0 = \frac{N}{V}$)

$$f_k^{F/B} = \frac{1}{\underbrace{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}}_{\substack{\text{groß} \\ e^{\text{positive Zahl}}}} \cancel{\pm 1}} \xrightarrow[\mu\to-\infty]{} \underbrace{e^{-\beta\varepsilon_k}\, e^{\beta\mu}}_{\text{Maxwell-Boltzmann-Verteilung}} = f_k^{MB}$$

in $f_k^{MB} \ll 1$ wegen $e^{\beta\mu} \ll 1$

d.h. im klassischen Fall: (wenige Teilchen pro Zustand)

ist der Unterschied zw. Fermion / Boson egal!

(weil man nicht an $f^{F/B} \approx 1$ rankommt)

c) <u>Bestimmung von $f^{F/B}$:</u>

$$f^{F/B} = f^{F/B}(\mu, \beta, V)$$

$\varepsilon_k(V)$

problematisch, man wird lieber $\frac{N}{V}$ festlegen.

festlegen über Temperatur d. Bads

$$N = \sum_k f_k^{F/B}(\beta, \mu, V) = N(\beta, \mu, V)$$

festlegen

$$\rightarrow \text{umstellen nach } \mu \rightarrow \mu(T, \underbrace{V, N}_{\frac{N}{V}})$$

d) <u>Zustandsgleichungen:</u>

kalorisch: $E = \sum_{ks} \varepsilon_k f_k^{F/B}(T, V, \mu)$

thermisch: $\beta p = \partial_V \ln Z_{gk}(T, \mu, V)$

e) qualitatives Bild:

$$f^{F/B} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \pm 1}$$

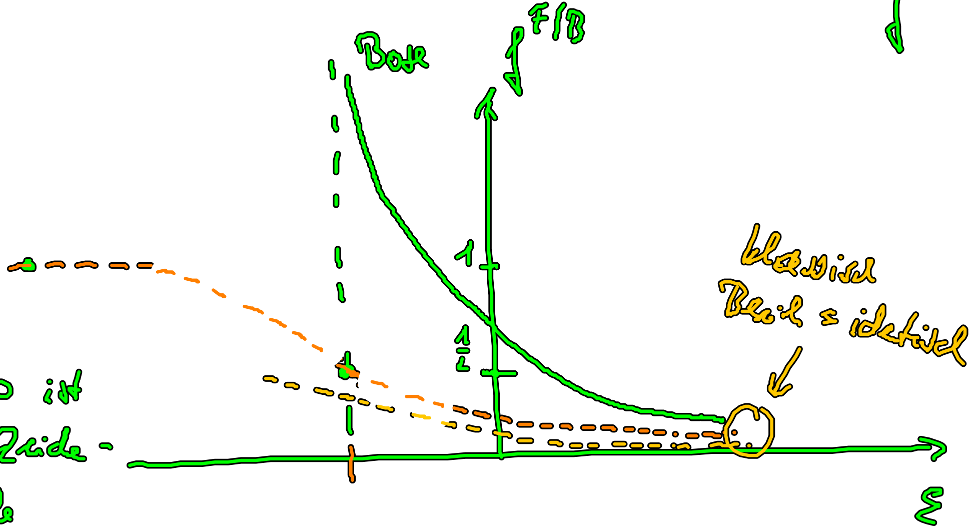
$\downarrow$

Singularität bei Boson für $\mu > 0$

($\mu = 0$ ist Sonderfall)

$\longrightarrow \mu \leq 0$

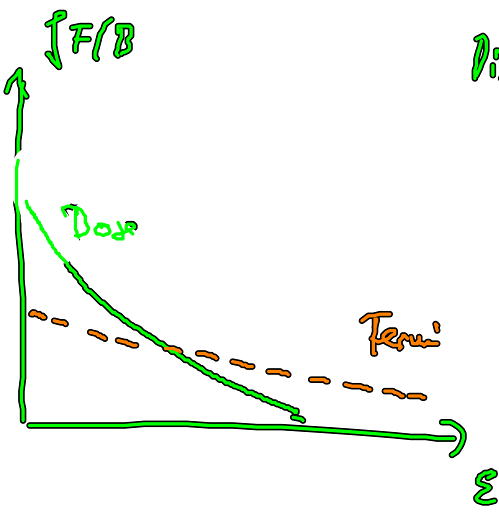
(für Fermion beliebig.)



$\varepsilon < 0$ ist nur Zeichenhilfe

$$\underbrace{\mu = \mu_F = \mu_B = \mu_{MB}}$$

Diskussion f. identisches Potential

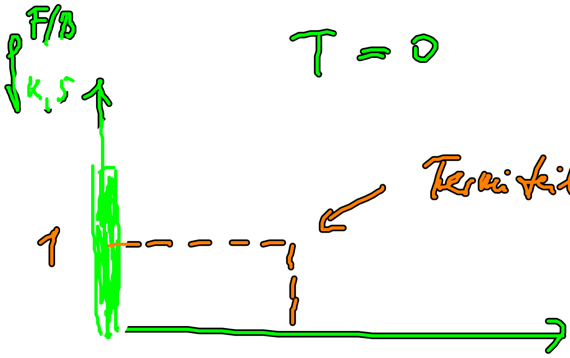


Diskussion f. identische Teilchenzahl N

($\sim$ Fläche unter Kurve)

e) Vorgriff auf Quanteneffekte bei $T \to 0$ extrem, $n_0 \gg \lambda_{th}^3$

$T = 0$



Fermiteilchen bilden Kasten mit Höhe 1

$\nearrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \varepsilon \qquad\qquad$ genaue Diskussion später

Boseteilchen versammeln sich im Grundzustand

3.5. Quanteneffekte in bosonischen und fermionischen Gasen

3.5.1 Zustandsgleichungen

Volumen

$$\beta p = \partial_V \underset{\substack{\uparrow \\ \text{letzte VL}}}{\ln Z_{gk}^{F/B}} = \partial_V \left\{ \pm \underset{\substack{k_i, s \\ \uparrow \\ \text{diskret}}}{\sum} \ln \left(1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_{k_i}(V) - \mu)} \right) \right\}$$

$s = \frac{1}{2}$ (F), $s = 0$ (B)

$$= \pm (2) \sum_{k_i} \frac{\mp e^{-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu)}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{k_i}}{\partial V} \right) \beta = -(2) \ldots$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} \propto \frac{1}{L^2} = \frac{1}{V^{2/3}} \quad (V = L^3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \propto \frac{1}{V^{2/3}\, V} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) = -\frac{2}{3V} \overbrace{\frac{1}{V^{2/3}}}^{\varepsilon} \sim$$

$$\beta p = (2) \sum_{k_i} f_{k_i}^{F/B} (-\beta) \left(-\frac{2}{3V}\right) \varepsilon_{k_i} \quad , \quad E = \sum_{k_i} \varepsilon_{k_i} f_{k_i}^{F/B}$$

wiederfinden

thermische und kalorische Zustandsgleichg. hängen zusammen

$$\boxed{p = (2) \frac{2}{3} \frac{E}{V}}$$

es reicht aus, die kalorische Zustandsgl. $E = E(T, V, \mu)$ zu bestimmen.

$$E = (2) \sum_{k} \varepsilon_k f_k^{F/B} (\mu, T, V).$$

Man kann sich erst was vorstellen und genau diskutieren, wenn man chemisch Potential $\mu = \mu(N, V, T)$ bestimmt hat.

3.5.2. Ideales Bosegas

$\mu \leq 0$ ist zugelassen, $s = 0$

μ durch N, V ersetzen in der Verteilg.

$$N = N(V, T, \mu) = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1}$$

, Versuch nach μ umzustellen.

$$N = \sum_k \frac{e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}}{1-e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}} = \sum_k e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)l}$$

$$= \sum_k \sum_{l=0}^{\infty} (\qquad)^{l+1} = \sum_k \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)l}$$

Index verschieb.

$$= \sum_{l=1}^{\infty} e^{\beta\mu l} \underbrace{\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k}_{\sum_k,\ \varepsilon_k \text{ eingesetzt}} e^{-\beta\frac{\hbar^2k^2}{2m}l}$$

→ 1dimensionale Gaußintegrale

$4\pi\int dk\,k^2 = \int d^3k$

$$= \frac{V}{\lambda_{th}^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu l}}{l^{3/2}}$$

<u>Notiz</u>: $e^{\beta\mu}$ nennt man Virial o. Fugazität

N als Reihe nach den Virial

für $\mu < 0$ könnte einige Terme der Reihe ausreichen.

„Virialentwicklung"

Riemannsche Zeta-

$\ell = 1$ gibt klassisch Gas

Funktion

da die Reihe wichtig ist: $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell^\nu} \equiv g_\nu(z)$

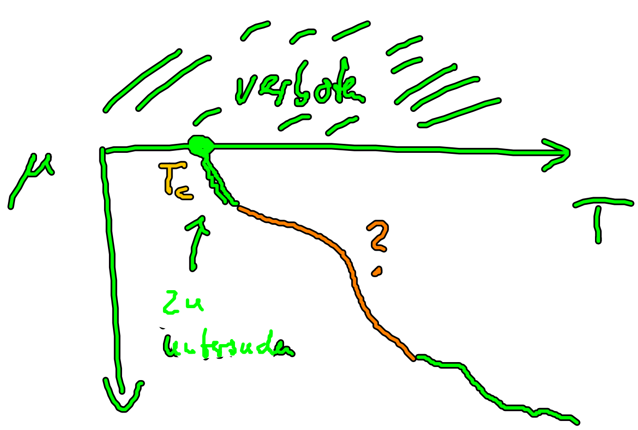
$$\frac{N}{V} = n_0 = \frac{1}{\lambda_{th}^3} \, g_{3/2}\left(e^{\beta\mu}\right)$$

wenn man das umstellt kann nach Dichte, gewinnt man das $\mu = \mu(n_0, T)$:

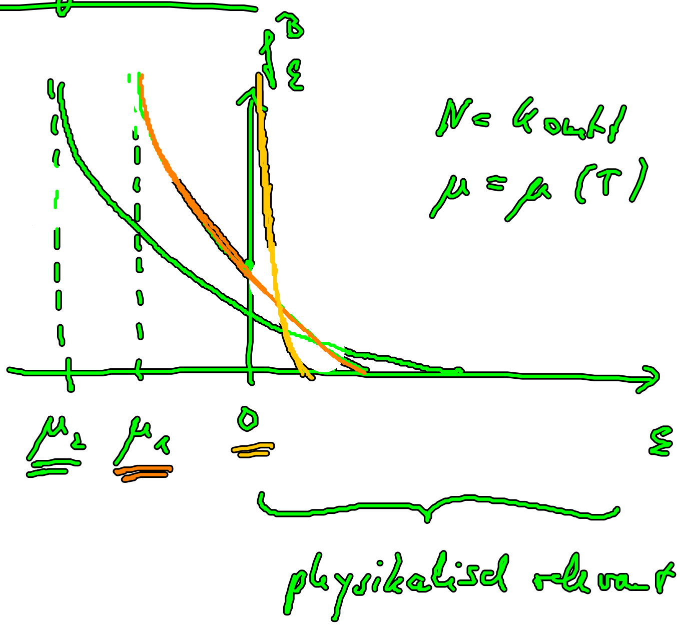
(i) klassischer Grenzfall $T \to \infty$, $n_0 \to 0$ wissen: $\mu \to -\infty$

(ii) $\mu \leq 0$ (Singularität)

(iii) $\mu \to 0$ kann sein, was bei $\mu = 0$ genau passiert, muß untersucht werden.



Zugehörige Bild



bekannt $\mu \to -\infty$
$T \to \infty$

$N =$ konst
$\mu = \mu(T)$

qualitativ!

weil $\mu = \mu(V = \text{konst}, N = \text{konst}, T)$

wenn $\mu \to 0$, so geht $T \to T_c$ die kritische Temperatur,

bei der $\mu = 0$ wird.

Formel für das chemische Potential für $T = T_c$:

$$\lambda_{th}^3 (T_c)\, n_0 = g_{3/2}(1) = 2{,}61$$

$$e^{\beta\mu} = e^{\beta \cdot 0} = 1$$

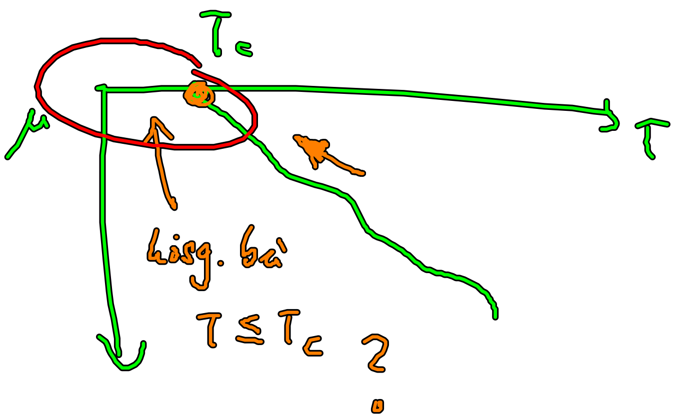
$$\lambda_{th}^3 = \frac{2\pi\hbar^2}{mkT}\Bigg|_{T=T_c}$$

umstellen nach T_c

$$\rightarrow T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk\, g_{3/2}(1)}\, n_0$$

D.h. offensichtlich skaliert die kritische Temperatur bei der $\mu = 0$ wird mit der Dichte n_0. $T_c \uparrow$, $n_0 \uparrow$

Interessante nichtklassische Effekte $\mu \to 0$ treten bei hohen Dichten auf.



was macht das chemische Potential an dieser kritischen Stelle?

am

wir brauchen μ für E, p, $(f^3(\mu, T, V))$

<u>Vorschlag</u>: n_0 konstant

T wird verringert im Experiment

$T \to T_c \Rightarrow \mu \to 0$

aber was passiert bei $T < T_c$?