

3.5.4. Ideales Fermigas

Modellsystem für verschiedenste Fermionen:

Elektronen in Festkörpern, Atomen

Nukleonen in Atomkernen

Quarks in Nukleonen

flüssiges Helium (${}^3\text{He}$)

analoges Vorgehen wie Bose gas:

$$f_{\vec{k}}^F = \frac{1}{e^{(\epsilon_{\vec{k}} - \mu)/kT} + 1} \quad \text{Verteilung,}$$

zunächst $\mu(T, u_0)$ bestimmen

Teilchenzahlgleichg., um $\mu(T, u_0)$ zu bestimmen

$$N = \sum_{\vec{k}, s} f_{\vec{k}, s}^F = \left| \sum_s (2s_0 + 1) = 2 \right| =$$

$s_0 = \frac{1}{2} \text{ Spin}$

Summe über Teilchenzahl
in allen Zustände

$$N = 2 \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}, s}^F = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{k}} - \mu)} + 1}$$

großes Kasten

→ umstellen um $\mu (T, u_0 = \frac{N}{V})$

$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ fñh wir als neue Variablen im Integral einfñhren, Kugelkoordinaten

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int dk k^2 \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$$

$$k \rightarrow \epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$d\epsilon = \frac{\hbar^2 k}{m} dk = \frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\epsilon} \frac{(2m)^{1/2}}{\hbar} = \frac{\hbar \sqrt{2}}{\sqrt{m}} \sqrt{\epsilon} dk$$

k über ϵ ausdrñcken

$$u_0 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 f_k^F = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\sqrt{m}}{\hbar \sqrt{2}} (\sqrt{\epsilon})^{-1} \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{\epsilon} f_\epsilon^F$$

$$u_0 = \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) f_\epsilon^F, \quad D(\epsilon) = \frac{1}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \sqrt{\epsilon}$$

$D(\epsilon)$ heißt Zustandsdichte $\sim \sqrt{\epsilon}$



Wahl ϵ die Zustände im System pro Energieintervall zählt:

$$\text{Anzahl d. Zustände} = \sum_{\vec{s}, \vec{k}} = \int d\epsilon D(\epsilon)$$

↑
Zustandsdichte

Mit Nanotechnologie kann man verschiedene dimensionale Elektronensysteme erzeugen mit unterschiedl. Zustandsdichte

(0d, 1d, 2d, 3d)

←
Starke Eigenschaftänderung

die Gleichung $\mu_0 = \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) \int_{\epsilon}^{\infty} F(\mu, T)$ ist

ein implizite Gleichung f. $\mu(T, \mu_0)$.

ein nichtige Umstellung ist nicht möglich (numerisch)

Grenzfall: $T \rightarrow \infty, \mu_0 \rightarrow k_B T \Rightarrow \mu = \mu_{\text{ideal}}(T)$

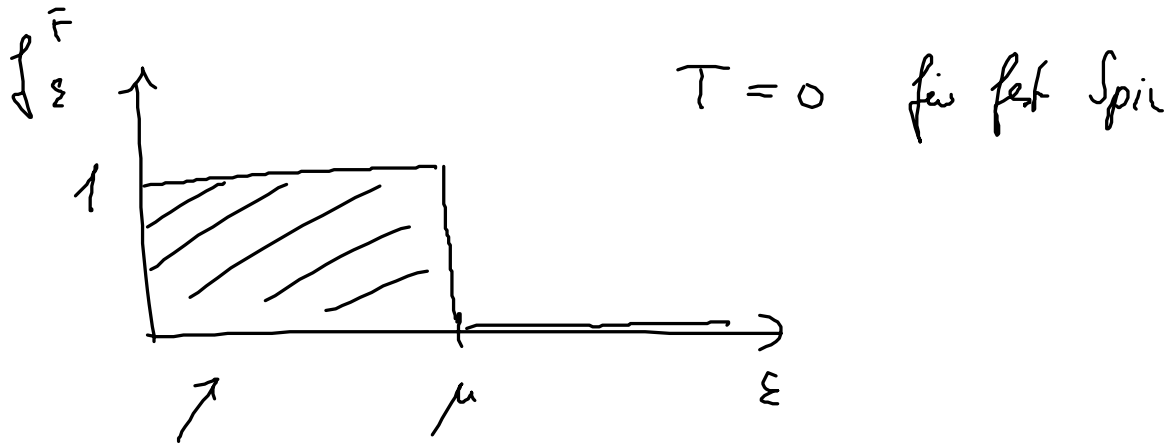
$T \rightarrow 0, \mu_0 \rightarrow \text{groß} \Rightarrow$ Quanteneffekte von Fermionen

$T \rightarrow 0$ ist der mehr interessante Fall

$$\frac{1}{T} = 0$$

$$\int_{\epsilon}^{\beta} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} = \begin{cases} 0 & \text{für } \epsilon > \mu, \text{ denn } e^{\beta(\epsilon-\mu)} \rightarrow \infty \\ 1 & \text{für } \epsilon < \mu, \text{ denn } e^{\beta(\epsilon-\mu)} \rightarrow 0 \end{cases}$$

$\beta \rightarrow \infty$



in jedem Zustand im Mittel 1 Elektron

hört auf, wenn alle El. angefüllt sind,

also in β sich μ durch u_0 bestimmen lassen

$$u_0 = \int_0^{\mu(T=0, u_0)} d\epsilon D(\epsilon) = \int_0^{\mu} d\epsilon \sqrt{\epsilon} \frac{1}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{4^3} = \frac{1}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{4^3} \frac{2}{3} \mu^{3/2}$$

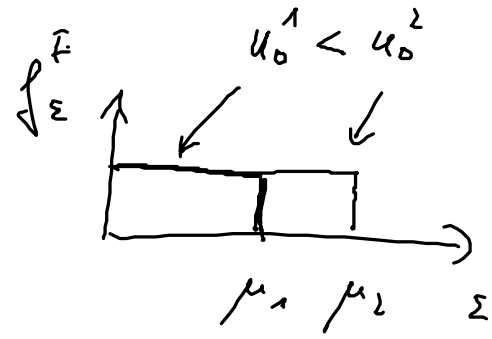
Fermi level f. $T=0$

eingesetzt

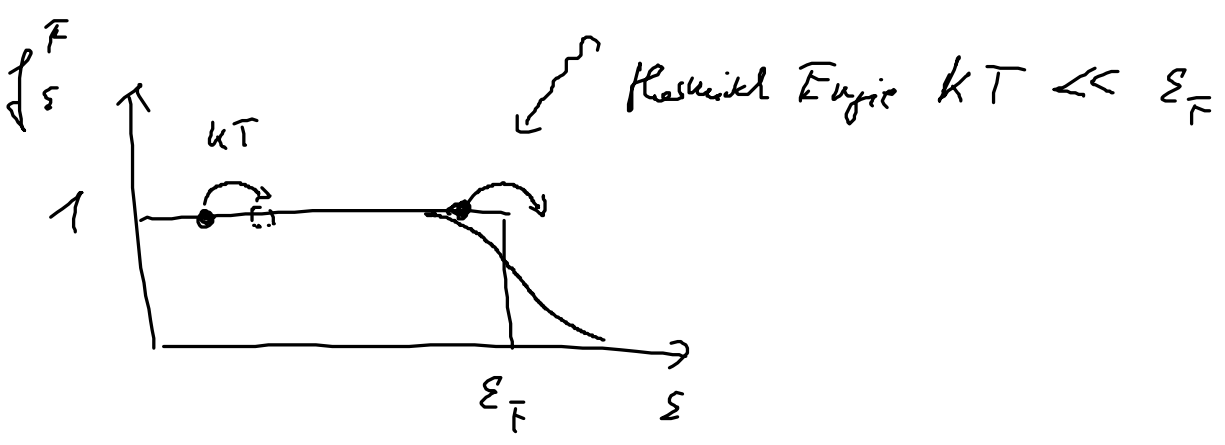
nach μ umstellen:

$$\underline{\mu(T=0, u_0)} = \left(3\pi^2 \right)^{2/3} \frac{4^3}{2m} u_0^{2/3} \equiv \underline{\epsilon_{Fermi}}$$

$\mu (T=0)$ nennt man Fermienergie. $\boxed{\varepsilon_F \sim u_0^{2/3}}$



ausdem Bild Bild für $T \neq 0$, aber noch klein



es ergibt sich eine Ausdehnung der Fermi kante um kT
 \rightarrow muß auch gezeichnet werden.

typische Systeme: kT bei Zimmertemp. $\approx \frac{1}{40} eV$

ε_F von Metallelektron $1-10 eV \rightarrow$ nichtklassisch

Fermi gas mit $\varepsilon_F \gg kT$ heißen entartete Fermigase

ϵ_F von weißen Zwergen, Neutronen $10^3 - 10^6$ eV

Man kann entartete und nichtentartete Sterne,

hängt von kT und $\epsilon_F \sim u_0^{2/3}$ ab.

Gerade fällt genau $\mu(T=0, u_0)$ zu berechnen:

$$u_0 = \int_0^{\infty} ds D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \quad \text{wird mit Hilfe der}$$

Sommerfeld-Entwicklung vereinfacht,

und kleinen Parameter entwickeln für entartete Gase:

$$\frac{kT}{\epsilon_F} \ll 1 \quad \mu \approx \epsilon_F, \quad \text{such } \mu(T, u_0) :$$

$$u_0 = \left(\int_0^{\mu} d\epsilon + \int_{\mu}^{\infty} d\epsilon \right) D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$$
$$= \int_{\mu}^{\infty} ds D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} + \int_0^{\mu} d\epsilon D(\epsilon) - \int_0^{\mu} ds D(\epsilon) \frac{1}{e^{-\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$$

Parameter wird durch neue Variable eingeführt:

$$x = \frac{\pm}{\beta} (\varepsilon - \mu)$$

$$u_0 = \int_0^{\mu} d\varepsilon D(\varepsilon) + \int_0^{\infty} \frac{dx}{\beta} \frac{D(\mu + x/\beta)}{e^x + 1} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{\beta} \frac{D(\mu - x/\beta)}{e^x + 1}$$

mit (+) mit (-)

Fehlt Taylorreihe f. die beiden letzten Integrale $\frac{x}{\beta} \ll \mu$

$$\frac{\mu}{kT} \gg x, \text{ lt. Definition } \frac{\mu}{kT} \gg 1$$

x-Werte > 1 werden durch e^x abgedämpft

die unabh. Terme d. Reihe fallen gegen einander weg und man erhält:

$$u_0 \approx \int_0^{\mu} d\varepsilon D(\varepsilon) + \int_0^{\infty} \frac{dx}{\beta} \frac{D'(\mu)}{e^x + 1} \frac{2x}{\beta}$$

D' ist die erste Ableitung aus dem 1. Term Taylor

$$\begin{aligned}
 u_0 &\approx \underbrace{\int_0^\mu d\varepsilon D(\varepsilon)} + \underbrace{\frac{2}{\beta^2} D'(\mu)} \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x}{e^{x+1}}} \\
 &\sim \int d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \quad \sim \frac{\partial}{\partial \mu} \sqrt{\mu} \quad \text{Zahl}
 \end{aligned}$$

umstellen nach $\mu = \mu(\beta, u_0) \rightarrow$

$$\mu = \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 \right)$$

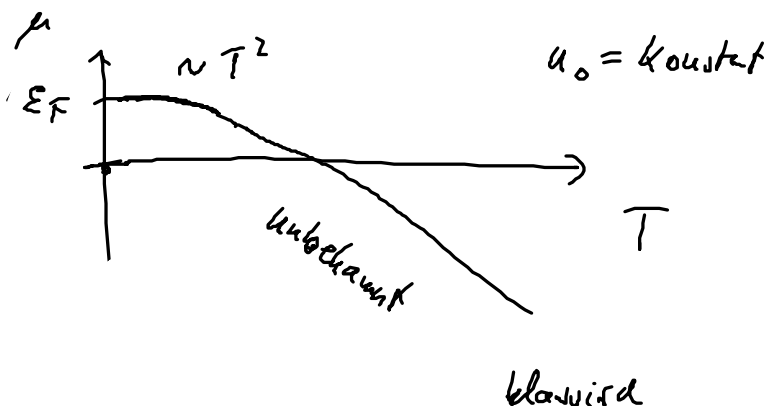
\uparrow
 $\mu(T=0)$

u_0 bestimmt in $\frac{\sigma}{A}$

$$\varepsilon_F \sim u_0^{2/3}$$

Bemerkung:

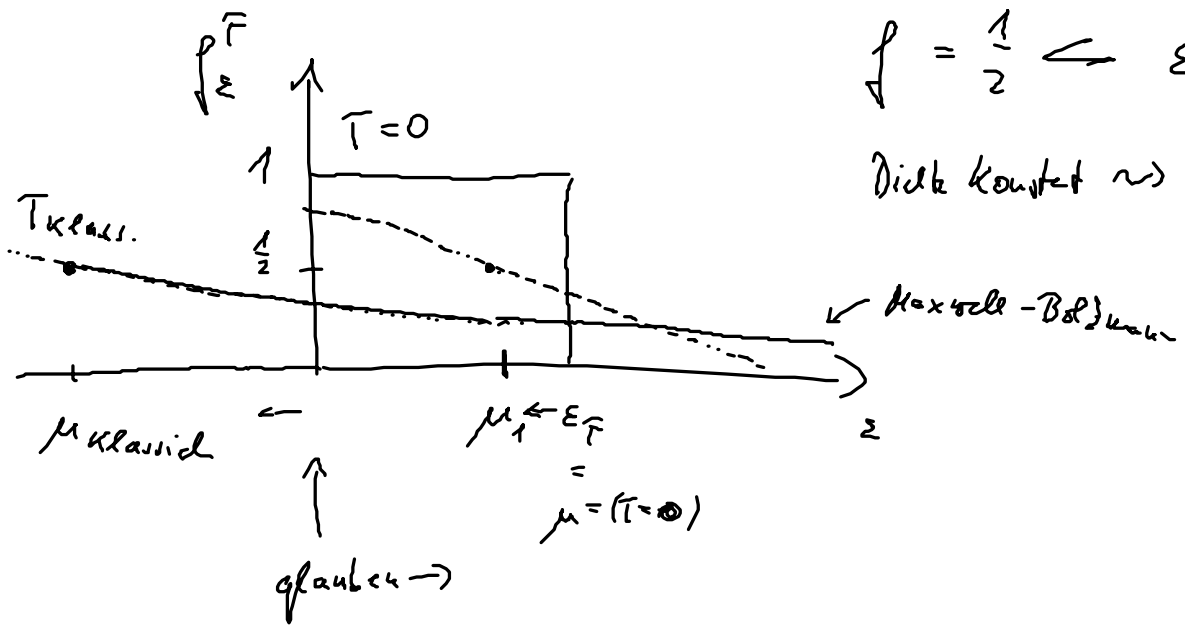
a) Das chemische Potential μ kann (im Gegensatz zu Bosonen) negativ und positiv werden!



$$T \rightarrow \infty$$

$$\mu \rightarrow -\infty$$

b) Verhalten der Fermifunktion



$$f = \frac{1}{2} \iff \epsilon = \mu$$

Dicke konstant \leadsto Fläche ähnlich, bis $D(\epsilon)$

c) spezifische Wärme d. Elektronengases:

mit Sommerfeld wird was $n_0 = \frac{N}{V}$ brechen las, sondern

$$\text{and } E = \frac{\pi^2}{6} D(\epsilon_F) T^2 \sim T^2 \quad (\text{kleine Temperatur})$$

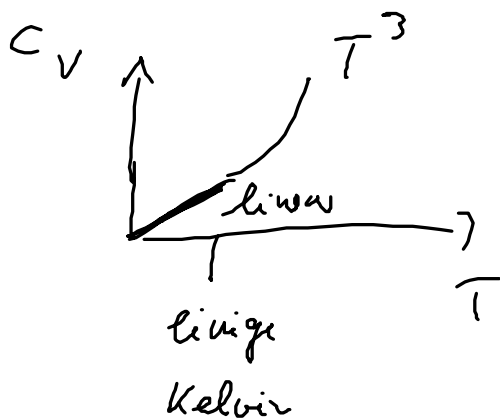
$$\rightarrow c_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \sim T$$

insgesamt gibt es also 2 Anteile zu c_v

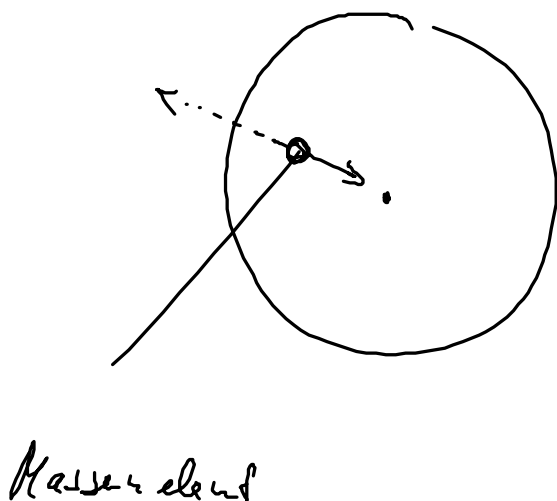
beim Festkörper für $T \rightarrow 0$:

$$C_V \propto T \quad (\text{Elektronen})$$

$$C_V \propto T^3$$



d) naive Theorie für Stabilität v. Sterne



Kugel mit Gas
Plasma aus + und -
↓ ↓
keine elektromagn. Kraft

→ Emission arbeitet daran die
Stern zu kollabieren

---> Druckkraft d. Gases, arbeitet
an Explosion

entartet bzw nicht entartete Sterne, $kT \begin{matrix} > \\ ? \\ < \end{matrix} \mu$

Fernigart

$T \rightarrow 0$

(Dichte hoch)

Source

kleinere dichte für f. Druck nicht aus

(Dichte ist gering)

$$\frac{N}{V} = \text{konst}$$



$$E_{\text{gravit.}} = -\frac{G}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{u_0(\vec{r}') u_0(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= -\frac{G}{2} \frac{N^2}{V^2} \int d^3r \int d^3R' \frac{1}{|\vec{R}'|} ; |\vec{R}'| = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

$$= -\frac{G}{2} \frac{N^2}{V^2} V \underbrace{4\pi \int_0^R dR' R'}_{R^2} \quad R = \text{Starrradius}$$

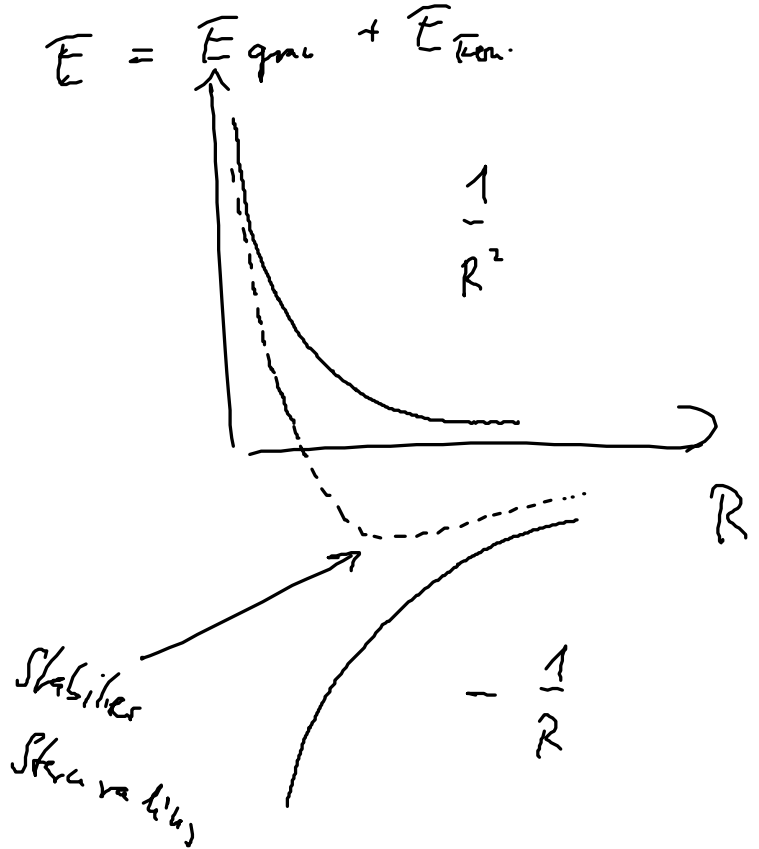
$$V \sim R^3$$

$$\sim -\frac{R^2}{R^3} \sim -\frac{1}{R}$$

$$E_{\text{Fermi}} = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon D(\epsilon) \epsilon \sim u_0^{2/3} \sim \frac{1}{R^2}$$



Energie d. Fermigases



Nachweise f. hohe Dichte

$$kT \ll E_F$$

aus dem fließgewicht v. Fermidruck und Gravitationsdruck.

e) thermische Zustandsgleichung

$$p = \frac{2}{3} \frac{E}{V} \underset{T \rightarrow 0}{=} \frac{3}{5} E_F \quad (\text{Kittelbuch})$$

Druck verschwindet nicht

f. $T \rightarrow 0$

im Gegensatz zu Bosonen

$$p \sim n_0^{2/3}$$

Ein Fermigas kann nie auf einen Punkt komprimiert werden.