I. Stochastische Prozesse

I.1. Wichtige Begriffe

- **Zufällige Prozesse** (stochast. Prozess): Kenntnis über ein System (genauer: über den Mikrozustand des Systems) bei allen vergehenden Zeiten reicht nicht aus, um seine zukünftige Entwicklung genau festzulegen

Beispiel

- Zufallswanderer in einer Dimension (random walk)

$$x(t) = n(t)\, a$$

a: Schrittweite (Konstant)

$n(t)$: ganze Zahl (zufällig)

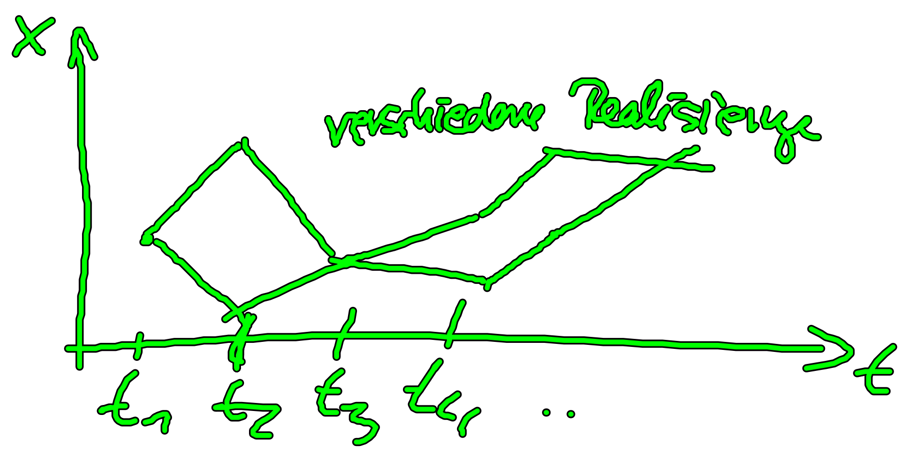
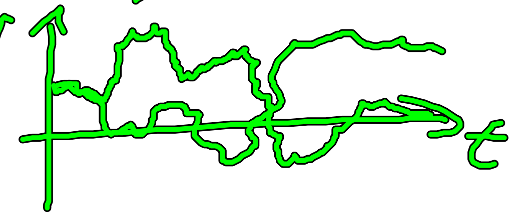
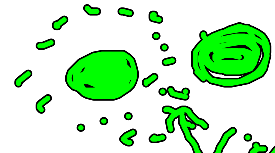


Illustration (diskrete Zeit)

– Geschwindigkeiten eines kolloidalen (Brown'schen) Teilchens





– Münzwurf

Wichtig: Beim stochast. Prozeß interessiert uns nicht nur eine einzelne Realisierung, sondern deren Gesamtheit (Wahrscheinlichkeit)

• Zufallsvariablen („Ereignisse")

↳ es gibt für jede Zufallsvariable eine Menge mögliche Zustände sowie dazugehörige Wahrscheinlichkeit

$$\left.\begin{array}{l} \text{Beispiel Münzwurf:} \quad x_1 = \text{Zahl oben} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_2 = \text{Kopf oben} \\ \text{Wahrsch. für die Einzelereignisse: } p_1 = p_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{diskrete Zufallsvariable}$$

Kontinuierliche Zufallsvariable (z.B. der Ort oder die Geschw. des Kolloids) z.B. in einer Dimension $x \in \mathbb{R}$

Wahrscheinlich

$$P(x' \leq x \leq x' + dx') = \rho(x')\, dx'$$

P: Wahrsch., dass x im Intervall $[x', x'+dx')$ ist

ρ: Wahrscheinlichkeitsdichte

Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \rho(x') = 1$$

Falls die Ereignisse nur diskret sein können:

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{n} \delta(x - x_i)\, p_i$$

mit $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

p_i: Einzelwahrsch.

n: Zahl möglicher Zustände

Mittelwert:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho(x)\, x$$

allg.: Mittelwerte von Funktionen von x

$$\langle \varphi \rangle = \int dx\, \rho(x)\, \varphi(x)$$

- betrachte System mit zwei Zufallsvariablen x_1, x_2

---

x_1, x_2 heißen unkorreliert, falls

(z.B. Impulse p_i eines idealen Gases: $\rho(p_1 \dots, p_N) \sim e^{-\beta \sum_{i=1}^{N} p_i^2/2m}$) $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_1)\,\rho(x_2)$

Faktorisierung!

Folgerung:

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \int dx_1 \int dx_2\, \rho(x_1, x_2)\, x_1 x_2$$
$$= \int dx_1\, \rho(x_1)\, x_1 \int dx_2\, \rho(x_2)\, x_2$$
$$= \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$$

- <u>Momente</u> einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

betrachte zunächst wieder den Fall <u>einer</u> Zufallsvariable

$$M_\nu := \langle x^\nu \rangle$$ ν-tes Moment der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zugehörige
Erzeugende Funktion

$$Z(\alpha) = \underbrace{\langle e^{\alpha x} \rangle}_{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho(x) e^{\alpha x}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\langle \frac{\alpha^\nu x^\nu}{\nu!} \right\rangle$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} \langle x^\nu \rangle$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} M_\nu$$

es gilt:

$$\left. \frac{\partial^\nu Z(\alpha)}{\partial \alpha^\nu} \right|_{\alpha=0} = M_\nu$$

Sei nun $\alpha = ik$, $k \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow Z(\alpha) = Z(ik) = \langle e^{ikx} \rangle$$

charakteristische Funktion

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho(x) e^{ikx}$$

Fouriertransformierte von $\rho(x)$)

umgekehrt: $\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{-ikx} Z(ik)$

außerdem:

$$Z(ik) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(ik)^\nu}{\nu!} \langle x^\nu \rangle$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(ik)^\nu}{\nu!} M_\nu$$

$$\left.\frac{\partial^\gamma Z(ik)}{\partial \alpha^\gamma}\right|_{\alpha=0} = M_\gamma$$

<u>Kumulanten</u>:

Diese kann man ebenfalls über eine Erzeugende definieren:

$$\Gamma(\alpha) = \ln \langle e^{\alpha x} \rangle = \ln \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} M_m\right)$$

definiere:

$$\Gamma(\alpha) \stackrel{!}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} \underset{\text{Kumulante}}{C_\nu}$$

mit $C_\nu = \langle x^\nu \rangle_c$

auch hier gilt:

$$\left.\frac{\partial^\gamma}{\partial \alpha^\gamma} \Gamma(\alpha)\right|_{\alpha=0} = C_\nu$$

es gilt (hier ohne Beweis):

$\langle x \rangle_c = C_1 = M_1 = \langle x \rangle$ Mittelwert

$\langle x^2 \rangle_c = C_2 = M_2 - (M_1)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ Varianz der Verteilung

speziell: Gaußverteilung

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\langle x \rangle = \langle x \rangle_c = a$$

$$\langle x^2 \rangle_c = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma^2$$

$$\langle x^k \rangle_c = 0 \quad \text{für } k > 2$$

Verallgemeinerung auf den Fall mehrerer Zufallsvariablen

$$x \longrightarrow \underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$$

d : Zahl der Zufallsvariable

Erzeugende der Momente

$$Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha}\cdot\underline{x}} \rangle \quad \text{mit } \underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$$

$$= \sum_{\nu_1 \ldots \nu_d} \frac{\alpha_1^{\nu_1} \ldots \alpha_d^{\nu_d}}{\nu_1! \ldots \nu_d!} M_{\nu_1 \ldots \nu_d}$$

mit $M_{\nu_1 \ldots \nu_d} = \langle x_1^{\nu_1} \ldots x_d^{\nu_d} \rangle$

z.B. Gaußverteilung für mehrere Zufallsvariable

$$g(\underline{x}) = (2\pi)^{-d/2} (\mathrm{Det}\,\underline{\underline{A}})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \langle\underline{x}\rangle)\underline{\underline{A}}^{-1}(\underline{x} - \langle\underline{x}\rangle)\right)$$

Korrelationsmatrix

$$(\underline{\underline{C}})_{kl} = \langle (x_k - \langle x_k \rangle)(x_l - \langle x_l \rangle) \rangle$$

$$= \langle \Delta x_k \Delta x_l \rangle \qquad k,l = 1,\ldots,d$$

$$= \langle x_k x_l \rangle - \overbrace{\langle x_k \langle x_l \rangle \rangle}^{\langle x_k \rangle \langle x_l \rangle} - \overbrace{\langle \langle x_k \rangle x_l \rangle}^{\langle x_k \rangle \langle x_l \rangle}$$

$$+ \langle x_k \rangle \langle x_l \rangle$$

$$(\underline{\underline{G}})_{kl} = \langle x_k x_l \rangle - \langle x_k \rangle \langle x_l \rangle$$

falls $(\underline{\underline{G}})_{kl} = 0$ für $k \neq l$

$\Rightarrow$ Die Zufallsvariablen x_k und x_l sind unkorreliert!

speziell: mehrdim. Gaußverteilung

$$(\underline{\underline{G}})_{kl} = (\underline{\underline{A}})_{kl}$$

Zentraler Grenzwertsatz (hier ohne Beweis)

Gegeben sei eine Summe unkorrelierter Zufallsgrößen

$$X = x_1 + x_2 + \dots + x_d$$

unkorreliert, d.h. $\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$

d.h. $(C)_{12} = 0$

Für sehr große d gilt unabhängig von der speziellen Form der Einzelwahrscheinlichkeit:

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X - \langle X \rangle)^2}$$

mit $\sigma = \sqrt{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle}$

1.2. Markov-Prozess

Uns interessiert nun die Zeitentwicklung einer Zufallsvariable x

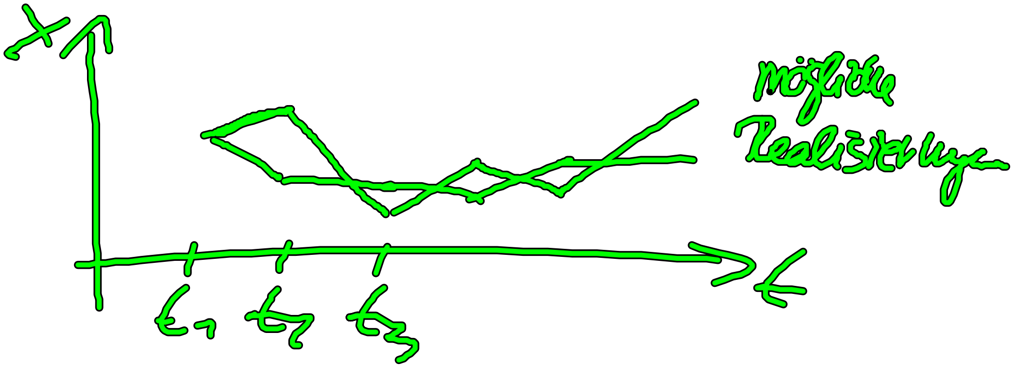
(Betrachte im folgenden zunächst den Fall $d=1$) und den Fall diskreter Zeiten)

Es sei x_1 : Wert von x zur Zeit t_1

x_2 : " " " " t_2

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

Verabredung: $t_1 < t_2 < \ldots$



- Zeitabhängige Verbundwahrscheinlichkeit

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots\dots)$$

Wahrsch., dass zur Zeit t_1 der Wert x_1, zur Zeit t_2 der Wert x_2, ..., vorliegt

Betrachte nun die <u>bedingte</u> Wahrscheinlichkeit

$$p(\underbrace{x_{n+1}, t_{n+1}; \dots; x_{n+m}, t_{n+m}}_{\text{Zukunft}} \,|\, \underbrace{x_1, t_1; \dots; x_n, t_n}_{\text{Vergangenheit - Gegenwart}})$$

Wahrsch. für das Auftreten von x_{n+1} bei t_{n+1}, ..., x_{n+m} bei t_{n+m} <u>unter der Bedingung</u>, dass zur Zeit t_1 der Wert x_1, ..., zur Zeit t_n der Wert x_n vorlag generell:

$P(A|B)$: Wahrsch. für das Auftreten von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gemeinsame Wahrsch. von A und B

es gilt also:

$$p(x_{n+1}, t_{n+1}; \ldots, x_{n+m}, t_{n+m} | x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n)$$

$$= \frac{p(x_1, t_1; \ldots\ldots; x_{n+m}, t_{n+m})}{p(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n)}$$