

elektrische Leitfähigkeit:

$$\underline{j} = \sigma \cdot \underline{E}$$

$\sigma$  Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{e^2}{m^*} \frac{(2m^*)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \int E^{3/2} \tau(E) \left( -\frac{df_0}{dE} \right) dE$$

Für kleine Felder:

$$f_0(E) = \frac{n}{N_c} e^{-E/kT}$$

(Gleichgewichtsvert., nicht gestört)

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = e \cdot n \mu}$$

unabhängig vom Feld!  
Temperaturabhängigkeit durch  $f_0, \tau$

mit  $\mu := \frac{e}{m^*} \langle \tau \rangle$  Beweglichkeit

$$\langle \tau \rangle \sim \int E^{3/2} \tau(E) e^{-E/kT} dE \quad \text{gemittelte Streuzeit}$$

$\Rightarrow$  linearer Transport:  $\underline{j} = \sigma \underline{E} \sim \underline{E}$  (Ohmscher Gesetz)

Analogie zum Drude-Modell der Leitfähigkeit eines klass. freien Elektronengases (1900)

Stoßwahrscheinlichkeit  $\tau^{-1} \equiv \langle \tau \rangle^{-1}$

mittlere Geschwindigkeit  $\underline{v} = -\frac{e}{m^*} \tau \underline{E} \equiv -\mu \underline{E}$

Stromdichte  $\underline{j} = -e n \underline{v} = e n \mu \underline{E} \equiv \sigma \underline{E}$

Für große Felder  $E$ :

$j_0$  hängt von  $E$  ab

$$\Rightarrow \sigma(E) = en\mu(E) \quad \text{feldabhängig!}$$

Nichtlinearer Transport

z.B. für akust. Phononen

$$\mu(E) \text{ mit } \frac{d\mu}{dE} < 0 \quad (\text{negative diff. Mobilität})$$

oder: nichtpolare opt. Phononen für  $E > \hbar\omega$

$$j_0 = env_d \frac{E}{\sqrt{a + \beta^2 E^2}}$$

$$\xrightarrow{E \rightarrow \infty} env_d = \text{const}$$

Driftgeschwindigkeitsättigung

Bemerkungen:

(i) Matthiessen'sche Regel

Für verschiedene Streumechanismen addieren sich die spezifischen Widerstände  $\rho_0$

vor.: Relaxationszeitnäherung

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}} \sim \sum_i \frac{1}{\tau_i} \sim \sum_i \frac{1}{\tau_i^0}$$

$$\text{(ii)} \quad \sigma = en(T)\mu(T)$$

↑  
Statistik  
des

Bändermodells

→ über Stoßprozesse  $T$  abhängig

• Temp. unabh. für Metalle

•  $\sim e^{-E/kT}$  f. Halbleiter  $\rightarrow$  stark temperaturabhängig

(iii) Monte-Carlo Simulation zur Lösung der Boltzmann Gleichung

## 6.4. Allgemeine Transportgleichungen

In 6.3: El. Feld  $\underline{E} = -\nabla\phi$



Transportkoeffizient  $\sigma$

el. Stromdichte  $\underline{j} = \sigma \underline{E}$

Verallgemeinerung: verallgemeinerte thermodyn. Kräfte  $\underline{X}_s$

$\Downarrow$   $(\nabla\phi, \nabla\mu, \nabla T, \dots)$

$\uparrow$  Filtertemperatur

verallgemeinerte Flüsse (irreversible Transportströme)  $\underline{J}_s$

Ziel: Ableitung von Transportgleichungen aus der Boltzmann G.

Annahme: Relaxationszeitnäherung für kleine  $E$   
(Isotropes, parabol. Band, isotrope elast. Streuung)

Zu  $\underline{j} = -e \int v_g f z d^3k$  (el. Stromdichte)

und  $\underline{\omega} = \int E(k) v_g f z d^3k$  (Energiestromdichte)

tragen nur die nicht-kugelsymm. Anteile bei  $\delta f := f(\underline{k}) - f_0(|\underline{k}|)$

Stationäre Boltzmanngl. in Relaxationszeitnäherung:

$$\underline{v}_g \nabla_r f - \frac{e}{\hbar} (\underline{E} + \underline{v}_g \times \underline{B}) \nabla_k f = \frac{\delta f}{\tau(E)}$$

$$\text{Mit } \underline{\nabla}_r f \stackrel{\textcircled{*}}{\approx} \underline{\nabla}_r f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \left( \frac{E - E_F}{kT} \right)} \underline{\nabla}_r \left( \frac{E - E_F}{kT} \right)$$

$$= \frac{\partial f_0}{\partial E} \left( -\underline{\nabla}_r E_F - \frac{E - E_F}{T} \nabla T \right)$$

$$\text{und } \nabla_k f = \nabla_k f_0 + \nabla_k \delta f = \underline{v}_k E \frac{\partial f_0}{\partial E} + \nabla_k \delta f$$

$$\underline{E} \cdot \nabla_k f \stackrel{\textcircled{*}}{\approx} \underline{E} \cdot \underline{v}_k \lambda \frac{\partial f_0}{\partial E}$$

$$(\underline{v}_g \times \underline{B}) \cdot \nabla_k f = (\underline{v}_g \times \underline{B}) \cdot \nabla_k \delta f$$

(Für  $\underline{B} = \underline{\nabla}_r E_F = \nabla T = 0$  stimmt dies mit  $f_1 = \frac{e\hbar}{m^2} \approx \frac{df_0}{dE} \underline{\varepsilon}$  überein (siehe 6.3.))

⊕ analog zur ersten Ordnung  
des Koeffizientenvergleiches  
für reines E-Feld

DGL für  $\delta f$

$$\Rightarrow \delta f = \tau \left\{ \left[ \underline{v}_g (\nabla_r E_F + \frac{E - E_F}{T} \nabla T) + e \underline{v}_g \underline{E} \right] \frac{\partial f_0}{\partial E} + \frac{e}{\hbar} (\underline{v}_g \times \underline{B}) \nabla_k \delta f \right\}$$

① DGL ist lösbar mit Ansatz:  $\delta f = \tau \underline{v}_g A \frac{\partial f_0}{\partial E}$   
↑  
zu bestimmen

② Lösung einsetzen in  $\underline{j} = -\frac{e}{m^*} \int \underline{v}_k \delta f \, z d^3k$

und  $\underline{v}_g = \underline{v} - E_F \delta \left( -\frac{1}{\epsilon} \right)$   
↑  
korrektive Energiedichte  
gesamte Energiedichte

$$= \frac{1}{m^*} \int \underline{v}_k (E - E_F) \delta f \, z d^3k$$

liefert Transportgleichungen

$$\underline{j} = \underbrace{M_{00} \underline{E}}_{\text{elektr. Leitf.}} + \underbrace{M_{10} \underline{B} \times \underline{E} + M_{20} \underline{B} (\underline{B} \cdot \underline{E})}_{\text{transversal Hall-Effekt longitudinal.}} + \underbrace{M_{01} \frac{\nabla T}{T}}_{\text{Seebeck-Effekt}} + \underbrace{M_{11} \underline{B} \times \frac{\nabla T}{T}}_{\text{Nernst-Effekt}} + M_{21} \underline{B} (\underline{B} \cdot \frac{\nabla T}{T})$$

$$-w_j = \underbrace{M_{01} \underline{E}}_{\text{Peltier Effekt}} + \underbrace{M_{11} \underline{B} \times \underline{E}}_{\text{Ettingshausen Effekt}} + \underbrace{M_{21} \underline{B} (\underline{B} \cdot \underline{E}) + M_{02} \frac{\nabla T}{T} + M_{12} \underline{B} \times \frac{\nabla T}{T} + M_{22} \underline{B} (\underline{B} \cdot \frac{\nabla T}{T})}_{\text{Fouriergesetz}}$$

mit Transportkoeffizienten

$$M_{ik} = -\frac{e}{3\pi^2} \left( \frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{E^{3/2}}{1 + (\mu_B)^2} \frac{\partial f_0}{\partial E} \left( \frac{e\tau}{m^*} \right)^{i+1} \left( \frac{E - E_F}{e} \right)^k dE$$

• Diese Transportgl. enthalten neben der el. Leitfähigkeit und dem Fouriergesetz der Wärmeleitung

- thermoelectr. Effekte (Peltier, Seebeck)
- galvanometr. Effekte (Hall)
- thermomagn. Effekte (Nernst..)

• In homogenen isotropen Festkörpern übt Magnetfeld mit  $\underline{B} \parallel \underline{E}, \nabla T$  keine primäre Wirkung auf die Ladungsträger  
 → nur transversale Effekte ( $\underline{B} \perp \underline{E}, \nabla T$ )

## 6.5. Magnetowiderstand und Hall-Effekt

$$\nabla T = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{j} = M_{00} \underline{E} + M_{10} \underline{B} \times \underline{E} + M_{20} \underline{B} (\underline{B} \cdot \underline{E})$$

Näherung:  $\tau$  energieunabhängig  $\rightarrow \mu = \frac{e}{m^* \tau}$

$$\Rightarrow M_{i0} = \frac{e \mu^{i+1}}{1 + (\mu B)^2} \frac{(2m^*)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty E^{3/2} \left( -\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) dE$$

↓ part. Integration

$$= \frac{e}{2} \int_0^\infty E^{1/2} f_0 dE$$

$$n = \int_0^\infty f_0 D(E) dE$$

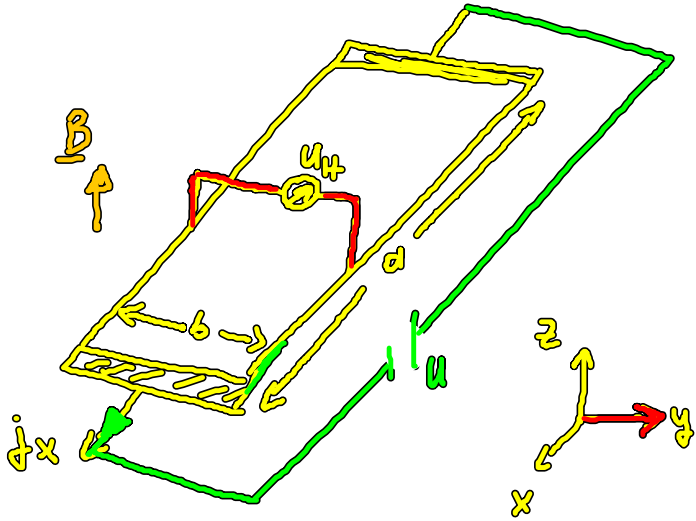
$$= \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} \mu^i \quad \text{mit } \sigma = en\mu$$

$$\Rightarrow \underline{j} = \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} \left[ \underline{E} + \mu \underline{B} \times \underline{E} + \mu^2 \underline{B} (\underline{B} \cdot \underline{E}) \right]$$

↑  
(schreibbare) Widerstandsänderung

$\underline{E} \perp \underline{B}$  (Hall-Konfiguration) :  $\underline{B} = (0, 0, B)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} & -\frac{\mu B}{1 + (\mu B)^2} \sigma \\ \frac{\mu B}{1 + (\mu B)^2} \sigma & \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$



angelegte Spannung:  $U = E_x a$

Randbed. :  $j_y = 0$

$$\Rightarrow (\mu B E_x + E_y) \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} = 0$$

$\Rightarrow$  induzierte Hall Spannung

$$U_H = E_y b = -\mu B E_x b$$

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} (E_x - \mu B E_y) = \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} (1 + (\mu B)^2) E_x$$

$$= \sigma E_x \quad \text{keine Widerstandsänderung durch Magnetfeld!}$$

(Grund: Näherung für Mio

$\rightarrow$  gut für Metalle oder  $\tau = \text{const}$

$\rightarrow$  schlecht für Halbleiter mit  $\tau(E)$

da nur für Elektronen mit der mittleren Geschwindigkeit Lorentzkraft und Gegenkraft des Hall Feldes sich kompensieren, nicht aber für die anderen Ebenen der Verteilung!

Wichtige Anwendung



Bestimmung von  $\mu$  und  $\eta$  in Halbleitern  
durch Messung von  $U_H$ ,  $j_x$ ,  $E_x$ ,  $B$

### Erweiterungen

- (i) Ambipolare Leitung in Halbleitern (El. + Löcher)
- (ii) Quanten-Hall-Effekt
- (iii) Inhomogene Verteilung von  $n$ ,  $E_y$