2.2.4. Kerreffekt und Solitonlösungen

Wellengleichung für Amplitude $\hat{E}$ mit Kerrnichtlinearität $\alpha_K |\hat{E}|^2 \hat{E}$:

$$\left(\partial_\xi + \cancel{\frac{\Delta_\perp}{2ik_L}} + \frac{i}{2} k_L'' \partial_\eta^2 \right) \hat{E} = i \alpha_K |\hat{E}|^2 \hat{E}$$

ebene Wellen (Ansatz) — Kerrnichtlinearität

die Gleichung ohne $\Delta_\perp$ ist die sogenannte <u>nichtlineare Schrödingergleichung</u>.

Analogie zur <u>Schrödingergleichung</u> ($\underline{x, t, \psi}$)

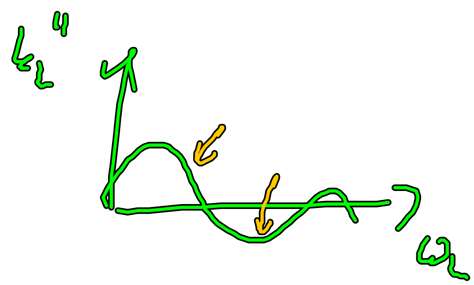
$\xi \leftrightarrow t$, $\eta \leftrightarrow x$, $\hat{E} \leftrightarrow \psi$

führt auf die linke Seite zur Standard-

Schrödingergleichung., rechte Seite: Nichtlinearität

- stellt auch Bsp. für nichtlineare Feldtheorie dar.
  (Verallgemeinerung: Ginzburg-Landaugleichung für Phasenübergänge)

- Diskussion der nl. Schrödingergleichg. in reduzierten Koordinaten
  Normalfall $k_L'' < 0$ in viel Materialien mit Dispersion, hängt aber von konkretem Material und ω_L ab



$$q = \frac{\tilde{E}}{\tilde{E}_0}, \quad \xi \to \frac{\xi}{\xi_0} \quad \text{mit} \quad \xi_0^{-1} = \alpha_K |\tilde{E}_0|^2$$

$$y \to \frac{y}{y_0} \quad \text{mit} \quad y_0 = \left(\xi_0 (-k_L'')\right)^{1/2}$$

wegen $k_L'' < 0$

typische Skala mit q: normiertes Feld, sodaß $q \sim 1$ wenn man $\tilde{E}_0$ später wählt

zur Umschreibg. Gleichg. mit ξ_0 multipliziere:

$$\left(\partial_{\xi/\xi_0} + \underbrace{\frac{i}{2}\,\xi_0\, k_L''\,\frac{1}{\eta_0^2}}_{\xi_0 k_L'' \,/\, \xi_0(-k_L'')}\,\partial^2_{\eta/\eta_0}\right)\tilde{E} = i\,\underbrace{\alpha_k\,\xi_0\,|\tilde{E}|^2}_{|q|^2}\,\tilde{E} \quad \Big|\cdot \frac{1}{\tilde{E}_0}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\partial_\xi - \frac{i}{2}\,\partial_\eta^2\right) q = i\,|q|^2\, q$$

q ist das gesuchte Feld in den dimensionslosen Koordinaten

Bemerkungen:

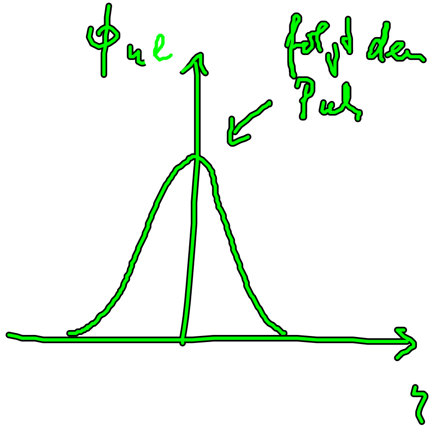
a) kubische NL in dieser Gleichung wird für viele physikalische Phänomene verwendet

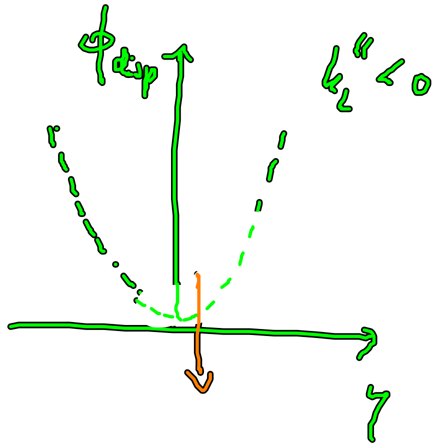
b) neben der NL tritt Dispersion auf (zweite Zeitableitung ∂_η^2) diese führt zu Verbreiterung d. Pulse im Zeitbereich

c) Nichtlinearität und Dispersion führen zu Phasenmodulation:

$$\phi_{nl} = \alpha_k\, |\tilde{E}(\xi=0,\eta)|^2\, \xi \quad \text{(Selbstphasenmodulation)}$$

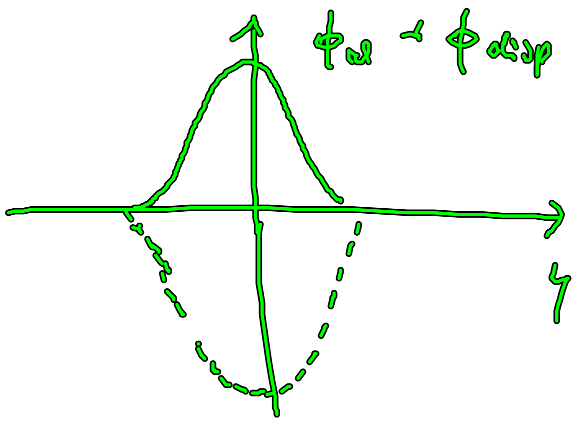
$$\phi_{disp} = -2\,\underbrace{\eta_0^2}_{\text{Pulsdauer}^{-4}}\, k_L''\, \eta^2\, \xi \quad \text{(Gruppengeschwindigkeitsdispersion)}$$





Treten beide gleichzeitig auf und beide prop. zu ξ.

<u>Summe beider Phasen</u> kann „in etwa" kompensieren



wenn man nur eine Phasenverschiebung einbaut

für $k_L'' < 0$ kann es zu einer gegenseitigen Auslöschung von Nichtlinearität und Dispersion kommen.

(für bestimmte Parameter $g_0, \bar{E}_0$) $\Rightarrow$ Solitäre Welle

für $k_L'' > 0$ $\rightarrow$ führt zu Verbreiterung des Pulses

Zur Bedingung der solitären Welle: Ansatz

$$q(\xi, y) = A(y - v_s \xi)\, e^{i\phi\xi + i\gamma y}$$

Geschwindigkeit der solitären Welle, frei wählbar!

$\phi, \gamma \rightarrow$ Konstanten die frei wählbar sind

gesucht ist $A(y - v_s \xi) = ?$

Gleichg. für A durch Einsetzen in die Schrödingergl.:

$$i\partial_\xi q + \frac{1}{2}\partial_y^2 q + |q|^2 q = 0$$

$$\underline{\underline{i\partial_\xi A}} - \underline{\phi A} + \frac{1}{2}\partial_y^2 A + \underline{\underline{i\gamma\partial_y A}} - \underline{\frac{1}{2}\gamma^2 A} + A^3 = 0$$

verwenden der Phasenfaktoren γ, ϕ: (wählen!)

(i) $\gamma = v_s$ bringt die erste Ableitung zum Verschwinden

denn $\partial_\xi A = \partial_y A \cdot (-v_s)$

(ii) fassen $\phi + \frac{1}{2}\gamma^2 = \phi + \frac{1}{2}v_s^2 \equiv B_0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\partial_y^2 - B_0\right) A + A^3 = 0$$

eigentlich gewöhnliche Dgl. $\rightarrow$ nichtlinear

mit $\partial_y A$ multiplizieren:

$$\frac{1}{2}\partial_y A \, \partial_y^2 A = B_0 A \partial_y A - A^3 \partial_y A$$

$$\frac{1}{4}\partial_y \left((\partial_y A)^2 \right) = \frac{1}{2} B_0 \partial_y A^2 - \frac{1}{4}\partial_y A^4$$

integrieren $\int dy$

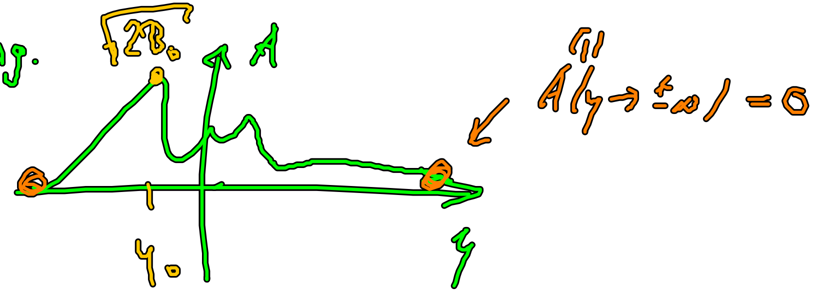
$$(\partial_y A)^2 = 2 B_0 A^2 - A^4 + C_0$$

Integrationskonstante

1. Ordg. nl. Dgl.

Charakter der Lösg. hängt v. Integrationskonstante ab, sieht man am Verhalten A', A bei $y \rightarrow \pm\infty$

für Polarisierte Lsg.



ist also $c_0 = 0$

$$\frac{dA}{dy} = A\sqrt{2B - A^2} \rightarrow \text{Trenn. der Variablen}$$

$$dy = \frac{dA}{A\sqrt{2B_0 - A^2}}$$

$$\int_{y_0}^{y} dy' = y - y_0 = \int_{\sqrt{2B_0}}^{A} dA' \frac{1}{A'(2B_0 - A'^2)^{1/2}}$$

$A' \le \sqrt{2B_0}$ $\qquad a^2 = 2B_0$ gesetzt

A als reelle Amplitude

Integraltafel

$$y - y_0 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - A'^2}}{A'}\right)\Bigg|_a^A$$

$$= -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-A^2}}{A}\right) + \underbrace{\frac{\ln 1}{a}}_{=0}$$

$$e^{-a(y-y_0)} = \frac{a+\sqrt{a^2-A^2}}{A}$$

implizit Gl. f. $A(y)$

<u>ebenso gilt:</u>

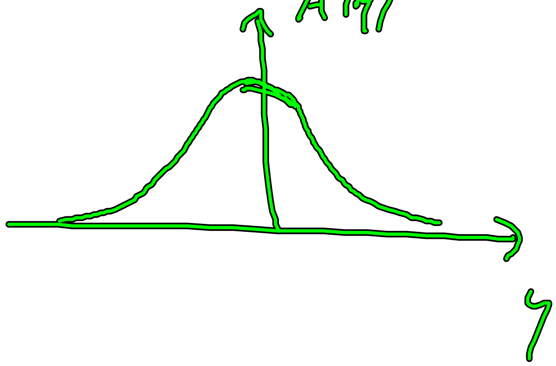
$$e^{+a(y-y_0)} = \frac{A}{a+\sqrt{a^2-A^2}}$$

<u>dann bilden:</u>

$$\frac{e^{-a(y-y_0)} + e^{a(y-y_0)}}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{(a+\sqrt{\ \ })^2 + A^2}{A(a+\sqrt{\ \ })} = \frac{a}{A}$$

$$A(y) = a\,\mathrm{sech}\big(a(y-y_0)\big), \quad a = \sqrt{2B_0} = A_0$$

maximale Amplitude



sech taucht wieder als Soliton Welle auf

Die Gesamtlösg. ist Soliton Welle:

$$q = A_0 \operatorname{sech}\{A_0(\eta - v_s\xi - \eta_0)\}\, e^{i\left(v_s\eta - \frac{v_s^2}{2}\xi + \frac{A_0^2}{2}\xi\right)}$$

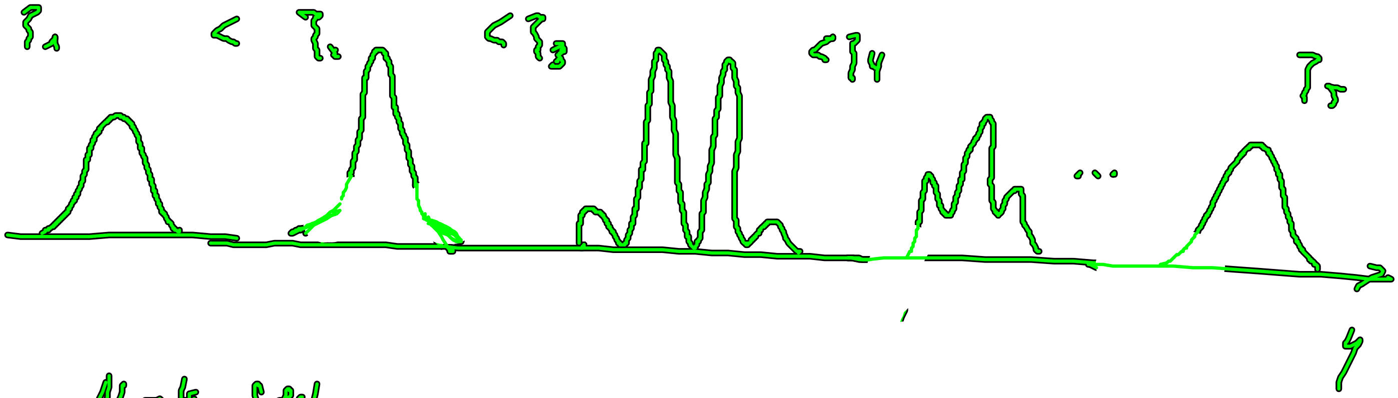
Amplitude — „Dauer" — Geschwindigkeit — Phase die nötig ist, um Kompensation NL $\leftrightarrow$ Disp. zu erreichen

Bemerkungen:

a) Soliton Welle durch Kompensation von NL und Dispersion

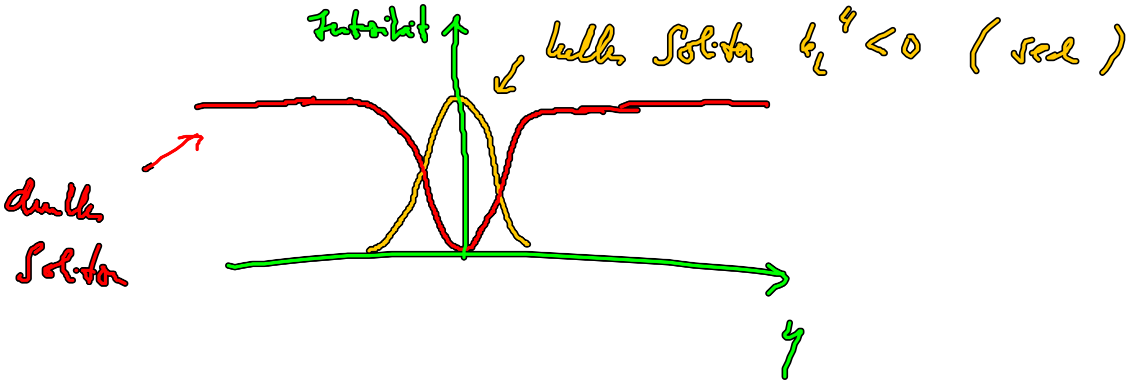
$\alpha_K(u_2) > 0 \quad , \quad k_L'' < 0$

b) man nennt diese Lsg. auch Solitonen, weil man zeigen kann, daß zerstörungsfreie überlagerg. empf. ist: Schnappschüsse in Zeit:



$N = 4$ Soliton

für $k_L'' > 0$ existiert ein dunkles Soliton



$$q = A_0 \tanh\left\{ A_0 \left(y - v_s \xi - y_0 \right) \right\} e^{i\left(-v_s y + \frac{v_s^2}{2}\xi + \frac{A_0^2}{2}\xi\right)}$$

ist ein dunkles Soliton

es existiert auch <u>graues</u> Soliton