

# 5. Theorie der Laseremission

(Haken „Licht u. Materie“, Band 2)

- Resonator im Medium:

ext. Pumpe

Metall



(durchlässig für Blue-Stein)

- Ansammlung von  $\rho_{22}^i(t)$   
Zweiniveausystemen (ZNS)

- Inversion:

$$\Delta_{12}^i = \rho_{11} - \rho_{22} < 0$$

- skalare Theorie (1D)

- Vorgehen:

(1) Feldmoden (2) Materie

(3) Feld-Materie Kopplung

(4) Selbstkonsistente Lsg  $\rightarrow$  Lasergleichungen

## 5.1 Beschreibung des Lichts (klass.)

- Wellengl.: für  $P=0$  Telegraphengl.

$$\left( \partial_x^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) E(x,t) = \mu_0 \partial_x^2 P + \mu_0 \partial_x j(x,t)$$

Dipoldichte der ZNS :  $\underline{P}(x,t) \leftarrow$  Materialtheorie

Ohm'sche Verluste :  $\underline{j} = \sigma \underline{E}$   
↑ Leitfähigkeit

→ Modenentwicklung.

$$\underline{E}(x,t) = \sum_{\lambda} \underline{E}_{\lambda}(t) \underline{u}_{\lambda}(x)$$

(i) beliebige Rbd. an Metallspliegeln:

$$\partial_x^2 \underline{u}_{\lambda}(x) + k_{\lambda}^2 \underline{u}_{\lambda}(x) = 0 \quad (\text{im Resonator})$$

(ii) vollständiges ONS

$$\langle \underline{u}_{\lambda} | \underline{u}_{\lambda'} \rangle = \int dx \underline{u}_{\lambda}^*(x) \underline{u}_{\lambda'}(x) = \delta_{\lambda, \lambda'}$$

(iii) Lösung

$$\underline{u}_{\lambda}(x) = \underline{e}_{\lambda} N \sin(k_{\lambda} x) \quad \text{mit } k_{\lambda} = \frac{\lambda \pi}{L} \quad \lambda \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

Pol. richtung      Normierung

→ Gl. für  $\underline{E}_{\lambda}(t)$  suchen

(1) Einsetzen der Modenentw. in Wellengl.

$$(2) \int dx \underline{u}_{\lambda}^*(x) \quad \text{und} \quad \langle \underline{u}_{\lambda} | \underline{u}_{\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda, \lambda'}$$

$$(3) \sigma(r) = \text{const}, \text{ sonst } \sigma_{\lambda \lambda'} = \int dx \underline{u}_{\lambda}^* \sigma \underline{u}_{\lambda'}$$

$$(4) \quad \underline{P}(x, t) = \sum_{\lambda} \underline{P}_{\lambda}(t) \underline{u}_{\lambda}(x)$$

$$\underline{P}(x, t) = \sum_i (d_{12} \rho_{12}^i + c.c.) \delta(x - x_i)$$

(5) Trennung in pos. u. neg. Frequenzen

$$E_{\lambda}(t) = E_{\lambda}^+(t) + E_{\lambda}^-(t) = A_{\lambda}^+(t) e^{-i\omega_{\lambda} t} + A_{\lambda}^-(t) e^{i\omega_{\lambda} t}$$

$$P_{\lambda}(t) = \sum_i \underline{u}_{\lambda}^*(x_i) \cdot \underbrace{d_{12} \rho_{12}^i}_{e^{-i\omega_{\lambda} t}} + \underbrace{u_{\lambda}(x_i) \cdot d_{21} \rho_{21}^i}_{e^{-i\omega_{\lambda} t}}$$

→ ergibt 2 Gl. (±):

$$\omega_{\lambda}^2 E_{\lambda}^{\pm} + \partial_t^2 E_{\lambda}^{\pm} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \partial_t E_{\lambda}^{\pm} = -\frac{1}{\epsilon_0} \partial_t^2 P_{\lambda}^{\pm}$$

• Slowly varying envelope approx.:

$$\rho_{12}(t) = \tilde{\rho}_{12}(t) e^{-i\omega_{21} t}$$



↑ langsame Einhüllende

$$E_{\lambda}^+ = A_{\lambda}^+(t) e^{-i\omega_{\lambda} t}$$

$$\rightarrow |\partial_t \tilde{\rho}| \ll |\omega_{21} \tilde{\rho}| \quad \text{und} \quad |\partial_t A_{\lambda}| \ll |\omega_{\lambda} A_{\lambda}|$$

(a) erste Ableitung

$$\partial_t E_{\lambda}^+ = (-i\omega_{\lambda} A_{\lambda} + \partial_t A_{\lambda}) e^{-i\omega_{\lambda} t} \approx -i\omega_{\lambda} A_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda} t} = -i\omega_{\lambda} E_{\lambda}^+$$

(b) zweite Ableitung  $|\partial_t^2 A_{\lambda}| \ll |\omega_{\lambda} A_{\lambda}|$

$$\begin{aligned} & \omega_\lambda^2 E_\lambda + \partial_t^2 E_\lambda \\ &= e^{-i\omega_\lambda t} (\omega_\lambda^2 A_\lambda^+ - \omega_\lambda^2 A_\lambda^- - 2i\omega_\lambda \dot{A}_\lambda^+ + \ddot{A}_\lambda^+) \\ &\approx -2i\omega_\lambda \dot{A}_\lambda^+ e^{-i\omega_\lambda t} = -2i\omega_\lambda (\dot{E}_\lambda^+ + i\omega_\lambda E_\lambda^+) \end{aligned}$$

(c) Polarisation:  $\ddot{P}_\lambda^+ \approx -\omega_{12}^2 P_\lambda^+ \approx \omega_\lambda^2 P_\lambda^+$

Einsetzen elementar in 2ten Ableitungen:

$$\partial_t^2 E_\lambda^+ = (-i\omega_\lambda - \kappa) E_\lambda^+ + \frac{i\omega_\lambda}{2\epsilon_0} P_\lambda^+$$

• Bemerkung:

- (a) Gl. für Stärke des E-Feldes der Mode  $\lambda$
- (b) schwingt mit  $\omega_\lambda$  (positives Resonanz)
- (c) gedämpft mit  $\kappa = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
- (d) getrieben durch Dipole  $P_\lambda^+$

• Dimensionslose Lichtmode:

$$E_\lambda^+ = \frac{i}{\sqrt{2\epsilon_0}} \sqrt{\hbar\omega_\lambda} b_\lambda, \quad E_\lambda^- = -\frac{i}{\sqrt{2\epsilon_0}} \sqrt{\hbar\omega_\lambda} b_\lambda^\dagger$$

• Bemerkung:

- (a) Energie des E-Feldes  $E_\lambda \propto |E_\lambda|^2$
- (b)  $\hbar\omega_\lambda \equiv$  Energie eines Photons
- $|b_\lambda|^2 =$  Photonenzahl in Mode  $\lambda$

• Stärke des Lichtmode:

$$\partial_t b_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa) b_\lambda$$

$$- \frac{\omega_\lambda}{2\epsilon_0} \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\hbar\omega_\lambda}} \sum_i \underline{d}_\lambda^*(r_i) \cdot \underline{d}_{12} P_{12}^i(t)$$

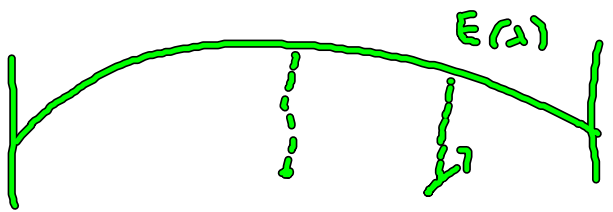
$$\partial_t b_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa) b_\lambda - i \sum_i g_\lambda^i P_{12}^i(t)$$

mit Kopplungsstärke des  $i$ -ten ZNS em. alle Lichtmode  $\lambda$

$$g_\lambda^i = \frac{i \underline{d}_{12}}{\hbar} \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar\epsilon_0}} \underline{d}_\lambda^*(r_i)$$

→ Dipolmoment treiber Mode

→ - " - koppeln mit Stärke  $\underline{d}_\lambda^*(r_i)$  an



## 5.2 Beschreibung der Materie

• Bewegungsgl. für ZNS:

$$\partial_t P_{12}^i = (-i\omega_{21} - \gamma) P_{12}^i + i \frac{\underline{d}_{12}^i \cdot \underline{E}(r_i, t)}{\hbar} \underbrace{(P_{11}^i - P_{22}^i)}_{\Delta_{12}^i \text{ Inversion}}$$

→ Feld nach Moden entwickeln &  $b_\lambda$   $\Delta_{12}^i$  Inversion

$$\partial_t \rho_{12}^i = (-i\omega_{21} - \gamma) \rho_{12}^i - i \sum_{\lambda} (g_{\lambda}^i)^{\dagger} b_{\lambda} \Delta_{12}^i \quad (\text{I})$$

$$\partial_t \Delta_{12}^i = -\gamma \sum_{\lambda} (g_{\lambda}^{i*} \rho_{12}^i b_{\lambda}^{\dagger} - g_{\lambda}^i \rho_{12}^i b_{\lambda}) - (\Delta_{12}^i - \Delta_0) \Gamma \quad (\text{II})$$

• Bemerkung:

(a) I u. II beschreiben Kopplung  $\rho_{12}^i$  u.  $\Delta_{12}^i$  an alle Feldmoden

(b)  $\gamma$  in I beschreibt phonon. Dämpfung (Phononen)

(c) nur in (II) beschreibt Relaxation der Inversion zu einem Gleichgewichtswert  $\Delta_0$  in der Zeit  $\frac{1}{\Gamma}$ , wenn man Lichtkopplung abschaltet.

In HL Laser wird  $\Delta_0$  durch ext. Pumpstrom vorgegeben

$$(4) \quad \Delta_0 < 0 \quad \text{---}$$

### 5.3 Lasergleichungen für 1 Mode

• Def.:  $P = \sum_i \rho_{12}^i$ ,  $\Delta = \sum_i \Delta_{12}^i$ ,  $\Delta_0 \rightarrow N \Delta_0$

1 Mode  $\rightarrow \lambda$  Index weglassen,  $g_{\lambda}^i = g = \text{const}$

$$\partial_t P = (-i\omega_{21} - \gamma) P - i g b \Delta \quad (\text{I})$$

$$\partial_t \Delta = -(\Delta - \Delta_0) \Gamma - 2i g (P b^{\dagger} - P^{\dagger} b) \quad (\text{II})$$

$$\partial_t b = (-i\omega - \kappa) b - i g P \quad (\text{III})$$

- gekoppelte DGLs, nichtlinear, da Produkte  $b \Delta$

$$\overline{\Delta} \begin{matrix} \uparrow \\ \rho \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{matrix} b$$

- Idee: Lsg. suchtst mit Resonanzmode  $\omega (\approx \omega_{21})$   
 $\rightarrow \rho(t) = \rho_0(t) e^{-i\omega t}$ ,  $b(t) = b_0(t) e^{-i\omega t}$

schnelle Relaxation:  $\gamma \rho \gg \partial_t \rho \rightarrow b_0(t)$  verschluckt  $\rho(t)$

$$\rho_0(t) = -i g \frac{b_0 \Delta}{\gamma} \quad \text{Einsetzen in (II) führt auf}$$

Photonzahl  $n = b_0^* b_0$

- Laserratinggleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta &= -\Gamma (\Delta - \Delta_0) - 2n\omega \Delta & \text{(Ia)} \\ \partial_t n &= -\lambda n - n\omega \Delta & \text{(Ib)} \end{aligned}$$

mit  $\omega = \frac{2g^2}{\gamma}$

• Bemerkung:

(a) nichtl. gekoppelte DGLs

(b) Resonatorverluste  $\lambda$  dämpfer Feld

(c)  $\omega = 2g^2/\gamma$  Rate mit der ein angeregtes Atom ein Photon pro Sekunde aussendet

(d) stimulierte Emission

für  $\Delta = \text{const}$  und  $\mathcal{K} = 0$  (keine Verluste)

$$(E) \quad n(t) = n_0 e^{-\omega \Delta t}$$

für  $\rho_{11} - \rho_{22} = 0 \rightarrow -1 = -\nu = \Delta$ , dann wächst  
Photonenzahl mit der Zeit  $\omega^{-1}$

(e) wenn endl. Photonenzahl  $n$  erzeugt wird  
dann verringert sich Inversion (IIa)

## 5.4 Stationärer Betrieb

• stationäre Lös.:  $\dot{\Delta} = 0 = \dot{n}$

$$\text{aus (Ia):} \quad \Delta = \frac{\Gamma \Delta_0}{\Gamma + 2\nu n}$$

$$\text{aus (IV):} \quad \nu (2\mathcal{K} + \omega \Delta) = \nu \left( 2\mathcal{K} + \frac{\Gamma \nu \Delta_0}{\Gamma + 2\nu n} \right) = 0$$

zwei Lösungen für  $n$ :  $n_1 = 0$

$n_2$  für  $\Delta_0 < 0$

$$2\mathcal{K} (\Gamma + 2\nu n_2) = \omega \Gamma |\Delta_0|$$

$$\Rightarrow n_2 = \underbrace{\left( \frac{\omega |\Delta_0| - 2\mathcal{K}}{4\mathcal{K}\nu} \right) \Gamma}_{\text{Photonenzahl} > 0}$$

$$\text{da } \omega n_2 > 0 \Rightarrow \left( \frac{\omega |\Delta_0|}{4\mathcal{K}} - \frac{1}{2} \right) \Gamma > 0$$



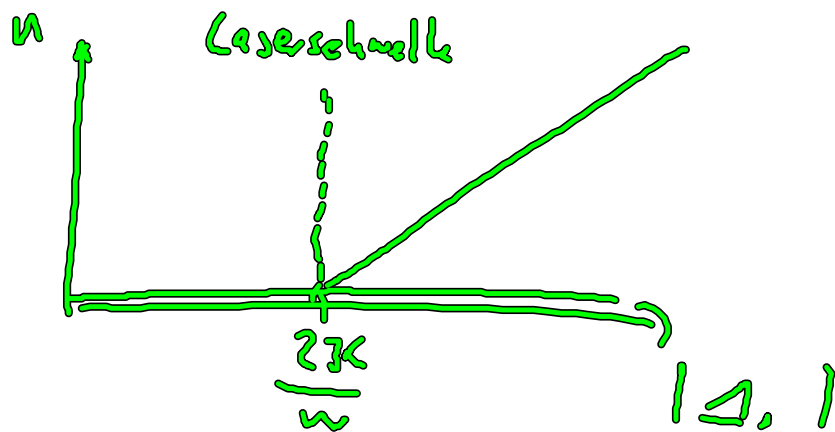
=> Laserbedingung:  $\boxed{|\Delta_0| > \frac{2\kappa}{\omega}}$

• Bemerkungen:

(a) Der gepumpte G6wert der Inversion  $\Delta_0 < 0$  muß groß genug sein, um Verlust  $\kappa$  zu kompensieren

(b) Unter kritischen Wert Pumpleistung  $|\Delta_0|$  tritt keine Lasertätigkeit auf ( $n_2 = 0$ )

(c) Überschreitet  $|\Delta_0|$  den krit. Wert, so ist ( $n_2 \neq 0$ ) Lasertätigkeit möglich



(d)  $n_2 = 0$  muß falsch sein, da Laser wenigstens als Lampe funktionieren sollte (nicht in Theorie enthalten)

## 5.5 Dynamische Betrachtungen

• Rotenztgl. für Photonzahl:  $\partial_t(\Delta - \Delta_0) \ll T(\Delta - \Delta_0)$

→ schnelle Relax. von  $\Delta \rightarrow \Delta_0$ .

(wieder Verstärkung durch langsame Feldamplitude  $b_0$ )

$$\Gamma(\Delta - \Delta_0) = -2\kappa\Delta \Rightarrow \Delta = \frac{\Delta_0}{1 + \frac{2\kappa\tau}{\Gamma}}$$

einsetzen in (II)

$$\Rightarrow \dot{u} = (-2\kappa - \omega\Delta_0)u + \frac{2\omega^2\Delta_0\tau^2}{\Gamma}u^2$$

• Photonenzahlvergl. für kleinen  $u$ :

$$\dot{u} = (-2\kappa - \omega\Delta_0)u + \frac{2\omega^2\Delta_0\tau^2}{\Gamma}u^2$$

• Bemerkungen:

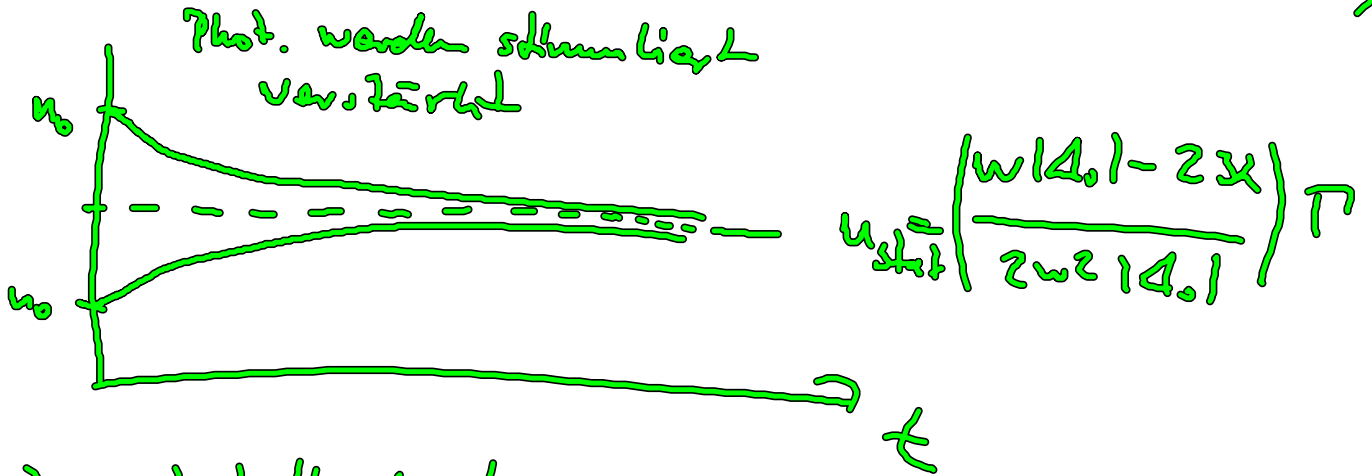
(a) Erster Term bewirkt:

$$u(t) = u_0 e^{(-2\kappa + \omega\Delta_0)t} \quad u_0 = u(t=0)$$

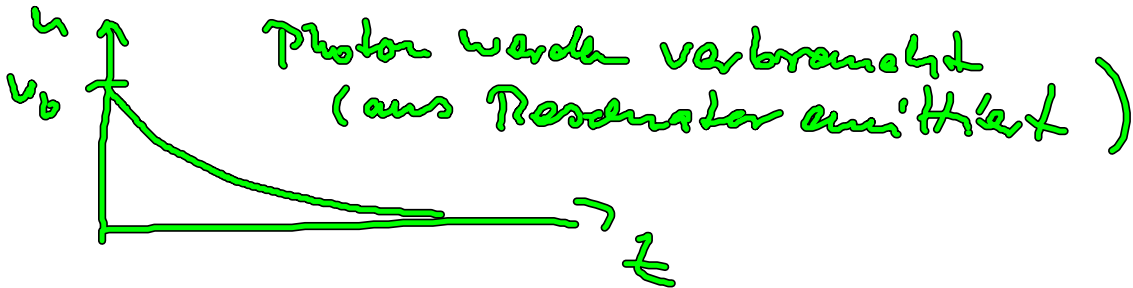
Für eine vorgegebene Photonenzahl im Resonator  $u_0$

(i) oberhalb der Laserschwelle

Anwachsende Photonenzahl (st. Em. Komp. Verluste)



(ii) unterhalb der Laserschwelle:  $n \rightarrow 0$



(b) Startprozess über spontane Emission, nicht in Theorie  $\rightarrow$  dazu QM Lichtfeld

• Ausblicken 1

für hohe Photonenzahl volle Dynamik

kann man Stabilitätsanalyse machen

$$n(t) = n_{stet} + \delta n(t), \quad \Delta = \Delta_{stet} + \delta \Delta(t)$$

Einsetzen in Laserdynamik.

$\rightarrow$  Relaxationsoszillationen

