Inhaltsverzeichnis / Übersicht

1 Funktionen

Funktion ordnet jedem Element x des Definitionsbereichs D möglichst eindeutig ein Element y des Wertebereichs W zu. (Physik: Zahlen, physikal. Größen)

1.1. Darstellung, Charakter, Begriffe

a) Darstellung

explizit: $y = f(x)$, Beispiel lineare Fkt $y = mx + n$, Winkelfkt, etc

implizit: $F(x, y) = 0$

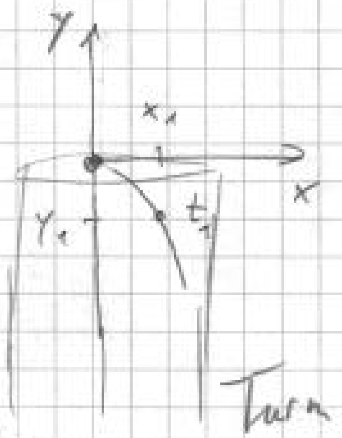
Parameterdarstellung: $x = x(t)$, $y = y(t)$,

Beispiel: Wurf mit Anfangsgeschwindigkeit in x-Richtung v_0:

Parameter Zeit: $y = -\frac{g}{2} t^2$, $x = v_0 t$

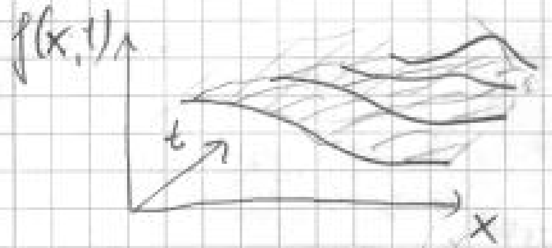
$\Rightarrow y = -\frac{g}{2} v_0^{2} x^2$

Wurfparabel als explizite Darstellung



in d. Physik werden mittels Funktion $f = f(x_i, t)$ (t: Zeit, x_i: x, y, z Raumkoordinate) mehr Variablen werden Raum u. Zeit Eigenschaft f zugeordnet

$x_i \hat{=}$ Raumkoordinate, $t \hat{=}$ Zeit $\Longrightarrow$ Zuordnung $x_i, t \to f(x_i, t)$

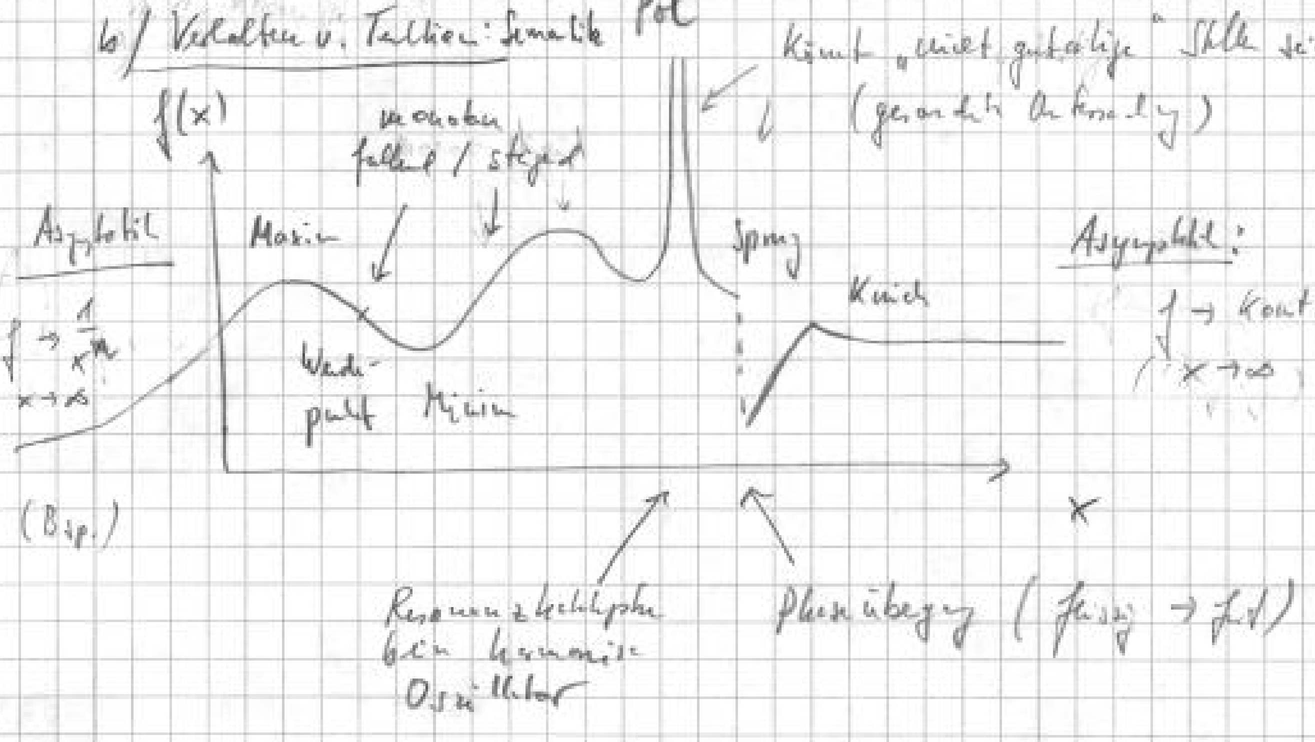


sind im allgemeinen gutartige Kurven (1 Variable x) oder Flächen von Variablen

Beispiel sei Temperatur $T = f(x,t)$ als Funktion von Ort x u. Zeit t (Skalarfeld) (T: Zahl)

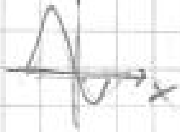
f kann auch Vektor sein $f \to \vec{f}$ (Vektorfeld: später)

b/ Verhalten v. Funktion: Schematik

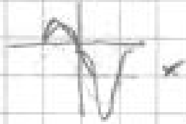


wird im allgemeinen geglättet durch weitere physikalische Effekte c/ Einfache Änderungen an Funktionen   gegeben $y = f(x)$

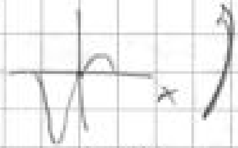
$f(x) \to f(-x) \;\hat{=}$ Spiegelung an y-Achse



$\to -f(x) \;\hat{=}$ Spiegelung x-Achse

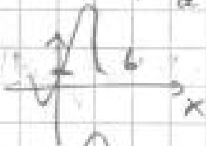


($\to -f(-x) \;\hat{=}$ Spiegelung am Ursprung)



$\to f(x-a) \;\hat{=}$ um a auf x Achse nach rechts geschoben $(a>0)$

$\to b + f(x) \;\hat{=}$ um b auf y Achse nach oben geschoben



$\to d \cdot f(x) \;\hat{=}$ d-fache Vergrößerung auf y-Achse

$\to f(dx) \;\hat{=}$ $1/d$-fache Vergrößerung der x Abstände

ergeben auch kompliziertere Dinge:

→ Drehungen von f um Winkel φ über eine Parameterdarstellung in τ (später genauer)

$$\begin{pmatrix} x \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ f(\tau) \end{pmatrix}$$

$$x = (\cos\varphi)\,\tau - (\sin\varphi)\,f(\tau)$$

$$g = (\sin\varphi)\,\tau + (\cos\varphi)\,f(\tau)$$

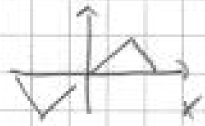
$g = g(x)$ ist gedrehte Funktion

τ wird durchgefahren um x und g zu bestimmen

d/ gerade und ungerade Funktionen

wenn $f(-x) = f(x)$: $f(x)$ ist gerade Funktion

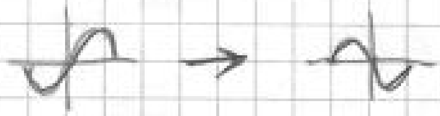
wenn $f(-x) = -f(x)$: $f(x)$ ist ungerade Funktion



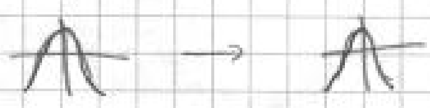
gerade mal ungerade : ungerade Funktion

ungerade mal gerade : gerade Funktion

$\sin(-x) = -\sin(x)$



$\cos(-x) = \cos(x)$



$tg(x)$ = ungerade Funktion $= \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Jede Fkt. kann in gerade + ungerade Fkt. aufgeteilt werden:

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right]}_{\text{gerade Fkt.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right]}_{\text{ungerade Fkt.}}$$

e) Dimensionen verschwinden oder:

→ wann kann man sich mit dimensionslosen Funktionen beschäftigen?

Bsp freier Fall $\ddot{z}(t) = -g \qquad \frac{d^2}{dt^2} z(t) = -g$

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{z(t)}{h} h = -g$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{z}(t) = -\frac{g}{h} \longrightarrow \bar{z} = z/h$$ = dimensionslose Höhe z, wird in Einheiten von h gemessen

$$\frac{d^2}{dt^2 \cdot \frac{t_0^2}{t_0^2}} \bar{z}(t) = -\frac{g}{h}$$

$$\frac{d^2}{d\bar{t}^2} \frac{1}{t_0^2} \cdot \bar{z} = -\frac{g}{h}$$

$$\frac{d^2}{d\bar{t}^2} \bar{z}(\bar{t}) = -\frac{g}{h} t_0^2 \equiv 1$$

⇒ Wähle $t_0 = \sqrt{\frac{h}{g}}$ als Zeiteinheit

$$\frac{d}{d\bar{t}} \bar{z} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

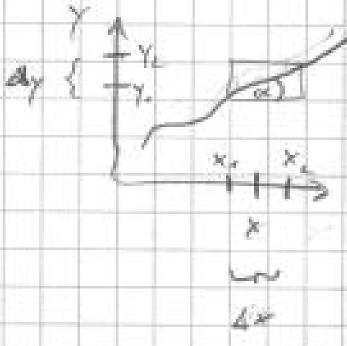
Man kann also immer zwischen den realen Größen und den dimensionslosen Fkt. wechseln.

→ es macht Sinn, sich $f(x) = y$ anzusehen

1.2. Differenzieren

(Übung 1)

Frage nach Änderung v. Größe bzgl. einer anderen Größe (Ort, Zeit)



a/ Differenzieren einer Funktion

Differentiale: über x, y Differenzen

$$dx = \lim_{\Delta x \to 0} (x_2 - x_1)$$

$$dy = \lim_{\Delta y \to 0} (y_2 - y_1)$$

als Differenz von x, y Werte die gegen Null gehen

Differentialquotient f: (oder Ableitung)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ gibt Änderung Δy, $\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ an der Stelle x an, wenn Δx sich ändert

in Physik: „Geschwindigkeit von y bzgl x“

Bsp: $f(x) = x^2$:

$$f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = x^2 + \Delta x\, x + \frac{\Delta x^2}{4}$$

$$f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) = x^2 - \Delta x\, x + \frac{\Delta x^2}{4}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x^2 + \Delta x\, x + \frac{\Delta x^2}{4}\right) - \left(x^2 - \Delta x\, x + \frac{\Delta x^2}{4}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x\, x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} x^2 = 2x$$

allgemeine Methode, um Ableitungsregeln zu bestimmen

Regeln: $' \hat{=}$ Ableitung nach x $\quad \dot{} \hat{=}$ Ableitung nach t

Produktregel $\left(y_1(x) \cdot y_2(x)\right)' = y_1'(x)\, y_2(x) + y_1(x)\, y_2'(x)$

Quotientenregel $\left(\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)' = \dfrac{y_1' \cdot y_2 - y_2' \, y_1}{y_2^2}$

Kettenregel $\left(z(y(x))\right)' = \dfrac{d}{dy} z(y)\Big|_{y = y(x) \text{ setzen}} \cdot \dfrac{d}{dx} y(x)$

mehr Variable: $y = y(x_1(t), x_2(t), x_3(t) \cdots)$

$$\dot{y} = \sum_i \partial_{x_i} y \cdot \dot{x}_i(t)$$

partielle Ableitung, d.h. nur Ableitung nach x_i, alle anderen x_j ~~(j)~~ als fest denken

$$y = e^{x_1 \cdot x_2} \rightarrow \partial_{x_1} y = e^{x_1 x_2}\, x_2$$

x_2 wird wie Konstante behandelt

Ableitungsregeln (ÜA)

a) $x(t) = t^{\alpha} \rightarrow \dot{x}(t) = \alpha\, t^{\alpha-1}$ (α jede reelle Zahl)

Bsp: $x = t^2 \quad \dot{x} = \left.\frac{(t+\varepsilon)^2 - t^2}{\varepsilon}\right|_{\varepsilon\to 0} = \left.\frac{t^2 + 2\varepsilon t + \varepsilon^2 - t^2}{\varepsilon}\right|_{\varepsilon\to 0} = 2t$

b) $x(t) = \sin t \rightarrow \dot{x}(t) = \cos t$

$\dot{x}(t) = \frac{\sin(t+\varepsilon) - \sin t}{\varepsilon} = \frac{\sin(t)\cos(\varepsilon) \ldots}{\varepsilon}$

S 34 Schule

c) Produktregel

$$\frac{d}{dt}\left(x_1(t)\, x_2(t)\right) = \frac{x_1(t+\varepsilon)\, x_2(t+\varepsilon) - x_1(t)\, x_2(t)}{\varepsilon}$$

$$= \frac{x_1(t+\varepsilon)\, x_2(t+\varepsilon) - x_1(t)\, x_2(t+\varepsilon) + x_1(t)\, x_2(t+\varepsilon) - x_1(t)\, x_2(t)}{\varepsilon}$$

$$= \frac{\left(x_1(t+\varepsilon) - x_1(t)\right)\cdot x_2(t+\varepsilon) + x_1(t)\left(x_2(t+\varepsilon) - x_2(t)\right)}{\varepsilon}$$

$$= \dot{x}_1 x_2 + \dot{x}_2 x_1 \rightarrow (x_1 x_2)^{\cdot} = \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2$$

d) Kettenregel

$$\dot{y}(x(t)) = \frac{y(x(t+\varepsilon)) - y(x(t))}{\varepsilon}$$

nach Definition $\dot{y}$

$$= \frac{y(\dot{x}\varepsilon + x) - y(x)}{\varepsilon} = \frac{y(x+\dot{x}\varepsilon) - y(x) + y(x) - y(x)}{\varepsilon}$$

$$= \frac{y(x+\dot{x}\varepsilon) - y(x)}{\varepsilon\dot{x}} \cdot \dot{x} = \frac{d}{dx} y(x) \cdot \frac{d}{dt} x(t)$$

e) mehr Variablen

$$y = y(x_1(t), x_2(t) \dots)$$

$$\frac{d}{dt} y = \frac{y(x_1(t+\varepsilon), x_2(t+\varepsilon) \dots) - y(x_1(t), x_2(t), \dots)}{\varepsilon}$$

$$= \Big\{ y(x_1(t+\varepsilon)\, \underline{x_2(t+\varepsilon)} \dots) - y(x_1(t+\varepsilon), \underline{x_2(t)} \dots)$$

$$- y(\underline{x_1(t+\varepsilon)}\, x_2(t) \dots) - y(\underline{x_1(t)}, x_2(t) \dots) \Big\} / \varepsilon$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2} y \; \dot{x}_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} y \cdot \dot{x}_1 \quad \dots$$

$$= \sum_i \partial_{x_i} y \, \dot{x}_i(t)$$