Vorlesung am 3.5. $9^{\underline{\underline{00}}} - 10^{\underline{\underline{00}}}$

dafür heute und nächste Woche $8^{\underline{\underline{15}}} - 10^{\underline{\underline{00}}}$

Sprechstunde am 24.4.: $15^{\underline{30}} - 16^{\underline{00}}$

(nicht 13^{00})

1.4. Potenzreihendarstellung von Funktionen

- oft günstig, Funktionen $f(x)$ durch Reihen $\left(\sum_n\right)$ von Funktionen $\varphi_n(x)$ darzustellen

$$f(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$$

Koeffizienten Basissatz v. Funktionen (lineare Algebra)

Sprechweise: man entwickelt $f(x)$ nach Basis $\{\varphi_n(x)\}$

Achtg.: oft nur auf Teilmenge d. Def.-Bereichs gültig wichtiges Beispiel Potenzreihenentwicklung

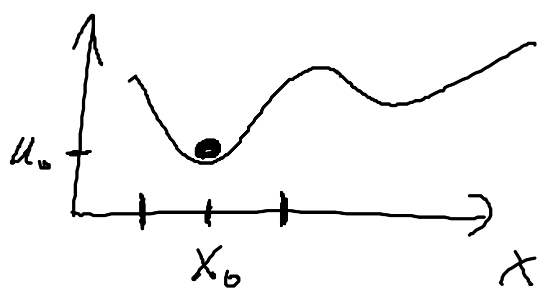
$$\boxed{f(x) = \sum_n c_n x^n}$$

Ziel: Konstruktionsvorschrift für c_n !

physikalisches Beispiel

$U(x)$

(Potential



im interessanten Bereich

$U = U_0 + \alpha x^2$

Versuch Bewegg.
und parabel Potential
zu beschreiben

Ü-Blatt 2. : Beispiel : geometrische Reihe

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$ soll entwickelt werden, Idee: über Dgl. von f die Potenzreihe ableiten

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot -1}{(1-x)^2} = \frac{f(x)}{(1-x)}$$

Kettenregel

$$\rightarrow \quad f'(x)(1-x) = f(x)$$

$$\text{Ansatz: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

<u>Ergebnis:</u> $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (c_n = 1) \qquad |x| < 1$$

1.4.1. Die Exponentialfunktion als Potenzreihe

die Exponentialfunktion ist definiert über $f'(x) = f(x)$
welche Funktion $f(x) \equiv e^x$ erfüllt diese Gleichung?

<u>a) Berechnung der e-Fkt.</u>

suche $f' = f$ mit $f(0) = 1$ (legt Faktoren fest)

$f(x) = \sum_n a_n x^n$, einsetzen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_n a_n x^n$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n = \sum_n a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(a_{n+1}(n+1) - a_n \right)} \underbrace{x^n} = 0$$

$= 0$ unabhängig gewählt

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$ <u>Rekursion</u>: $n \to n+1$

wenn $f(0) = 1 \longrightarrow 1 = a_0 \longrightarrow a_0 \to a_1 \to a_2 \to \cdots$

$$a_0 = 1 \to a_1 = 1 \longrightarrow a_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}$$

Exponentialfunktion: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad |x| < \infty$

Zahl e: $e^1 \equiv e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots \approx \underline{\underline{2{,}72}}$

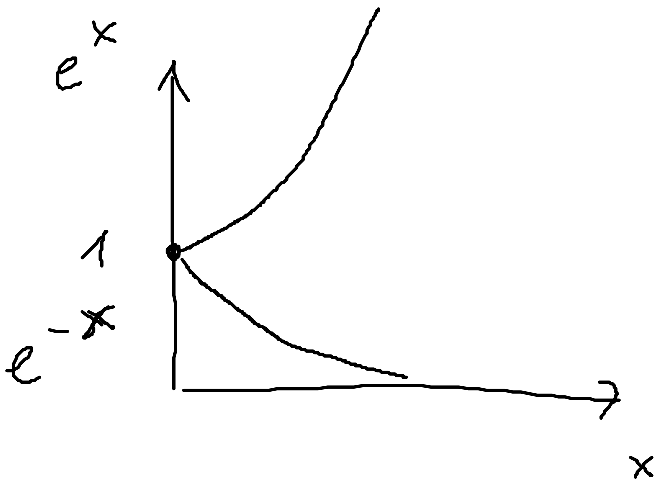
$\rightarrow$ damit e^x def. über Reihe

<u>b) wichtige Eigenschaft der Exp-Fkt.</u>

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{xy} = (e^x)^y$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

<u>c) Asymptotik</u>



$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

$$x^{-n} e^x \xrightarrow[x\to\infty]{} \;?$$

$$x^{-n} \sum_m \frac{1}{m!} x^m \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$$

$$x^n e^{-x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \quad \Longleftarrow$$ weil immer ab einem m_0 alle m's $> n$ sind.

Die Exponentialfunktion e^x $\left(\frac{1}{e^x} = e^{-x}\right)$ wird von keiner Potenz x^{-n} in ihrem Wachstum aufgehalten

d) Umkehrfunktion von e^x

$$f^{-1}(e^x) = x$$

$$f^{-1}(e^x) \equiv \ln(e^x)$$

Def. des natürlichen Logarithmus

Ableitung von $\ln x$?

$$f^{-1\,\prime}(x) = 1 / f'(f^{-1}(x))$$

$$\downarrow \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

<u>Logarithmengesetze</u>

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

1.4.2. Potenzreihen nach Taylor und MacLaurin

Konstruktionsvorschrift zur Bestimmung von C_n

in $f(x) = \sum_n c_n x^n$, wenn $f(x)$ bekannt.

$\longrightarrow$ Darstellung v. f in Potenzreihe

$$f(0) = c_0 + \cancel{c_1 0^1} + \cancel{c_2 0^2} \ldots$$

$$f'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} \Big|_{x=0} = c_1$$

$$f''(0) = 2c_2 \qquad f'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot c_3$$

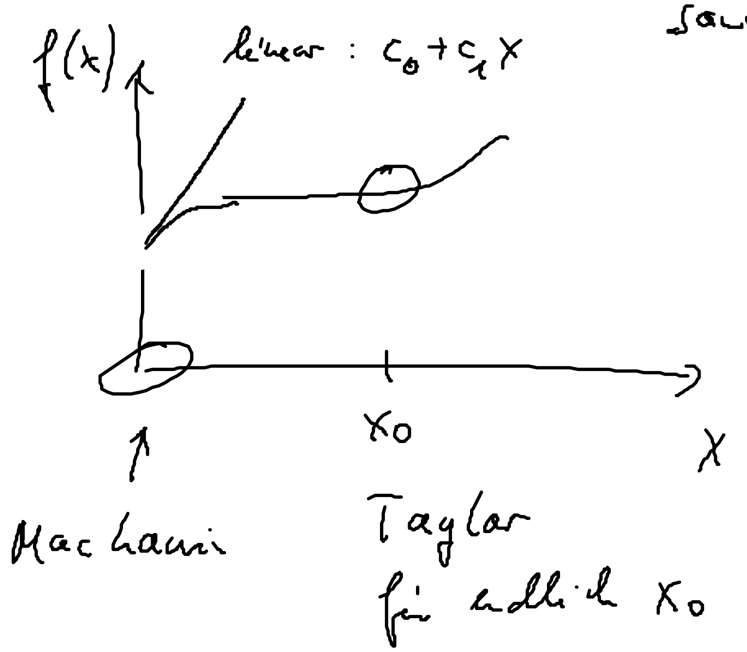
zu Hause !

$$f^{(n)}(0) = n!\, c_n \longrightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

wenn f bekannt so

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!} x^{n} \quad \text{Maclaurin reihe}}$$

in allgemein gut bei $x = 0$, sonst muß man zu viele n mitnehmen



Taylorreihe ist Verallgemeinerung der MacLaurin Reihe:

$$f(x_0 + \underset{\text{klein}}{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^{n}$$

1.4.3. Regel von L'Hospital

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$ gesucht, wenn $f(a)$ und $g(a) = 0$

ist undefiniert $\frac{0}{0} = ?$

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)\,x + \cdots$$

$$g(a+x) = g(a) + g'(a)\,x + \cdots$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a) + f'(a)x}{g(a) + g'(a)x} \to \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Verallgemeinerung. sind mögl. wenn

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} \to \frac{0}{0}$$ mit höheren Terme d. Potenzreihen

1.4.4. Beispiele f. Reihe (Bronstein)

$$(1 \pm x)^{m} = 1 \pm m x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots$$
m positiv

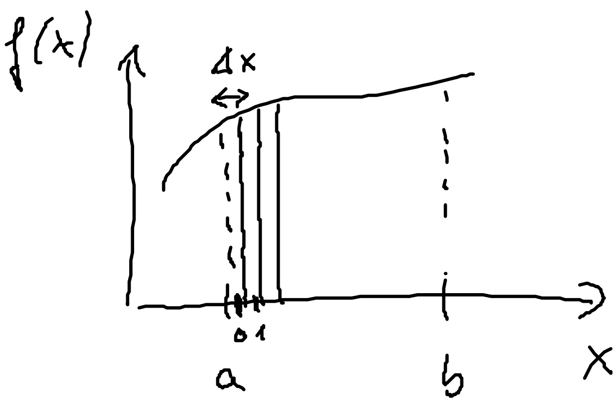
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots \qquad 0 < x \leq 2$$

$x_0 = 1$

$$\tan x = x - \frac{1}{3} x^3 + \dots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

1.5. Integration von Funktionen



Ziel: Berechnung der Fläche von a bis b unter $f(x)$ durch Zerlegen der Fläche in kleine Stücke und Summation

$$\text{Fläche} = \sum_{i=0}^{N} \Delta x \, f(x_i) \underset{\Delta x \to 0}{\equiv} \int_a^b dx\, f(x)$$

Summe über alle „kleinen" Rechtecke

b

Hauptsatz der Diff.-/Integralrechnung. $\int_a dx\, f(x) = F(b) - F(a)$

$F(x)$ ist Stammfunktion und $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

<u>Beispiele</u> (i) $\int_a^b dx\, 1 = \sum_{i=0}^{N} \underbrace{\frac{b-a}{N}}_{\Delta x} \cdot 1 = \left(\frac{b-a}{N}\right) \underbrace{\sum_{u=0}^{N} 1}_{N}$

$= \underline{\underline{b-a}}$

uneigentliche Integral

X^i

$$(ii) \quad \int_0^\infty dx\, e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta x\, e^{-\Delta x\, i} = \Delta x \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\Delta x\, i}}_{\frac{1}{1-e^{-\Delta x}}}$$

$$= \Delta x \frac{1}{1-e^{-\Delta x}} \approx \frac{\Delta x}{1-\left(1-\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\Delta x^2}{2!} \cdots\right)}$$

$\Delta x \to 0$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta x} = \underline{\underline{1}}$$

b) einfachste Integrationsregeln

$$\int_{-a}^{a} dx \begin{Bmatrix} \text{gerade Funktion} \\ \text{ungerade Funktion} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\int_{-a}^{a} dx\, f(x) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\int_a^b dx \; \ldots = \int_a^c dx \; \ldots \int_c^b dx \; \ldots$$

$$\int_a^b dx\, f(x) \underset{x \to x + x_0}{=} \int_{a+x_0}^{b+x_0} dx\, f(x - x_0)$$

$$\int_a^b dx\, f(x) \underset{x \to \lambda x}{=} \int_{a/\lambda}^{b/\lambda} dx\, f(\lambda x)$$

c) Uneigentliche Integrale

a) Fläche bis $x \to \pm\infty$ ausdehnen : $\int_0^{\infty}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots$

b) Funktion mit Polstelle ($f(x) \to \infty$ f. $x \to x_{pol}$)

∞ $\qquad$ b

Beispiel: $\int_a dx\, f(x) = \lim_{b\to\infty} \underbrace{\int_a dx\, f(x)}_{\text{ausrechnen}}$

$$\int_0^b dx\, f(x) = \lim_{a\to 0} \underbrace{\int_a^b dx\, f(x)}_{\text{ausrechnen}}$$

Polstelle bei $x = 0$

a) $\int_0^\infty dx\, e^{\alpha x} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b dx\, e^{\alpha x}$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \overset{=\infty}{e^{\underline{\underline{\alpha b}}}} - \frac{1}{\alpha} \right)$$

$\alpha > 0$ Integral $\exists$ nicht wird ∞

$\alpha < 0$ Integral $\exists$ $e^{-\alpha\infty} \to 0$

b) $\int_0^1 dx\, x^{-4} = \Big|$ 

$\Big| =$

$x \to 0$ wird

$x^{-n} \to \infty$
für $n > 0$

$$\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\Bigg|_{a\to 0}^{1} = \frac{1}{1-n} - \frac{a^{(1-n)}}{1-n} \underset{a\to 0}{=} \frac{1}{1-n}$$

für $n = 1$ bekommt man ∞,
das Integral existiert nicht

$n \neq 1 \to$ Integral existiert

Hinweis: erstmal $f(x)$ sich klar machen
$\to$ Besonderheiten?

1.5. Integrationmethoden $\quad \int dx\, f(x) = ?$

a) Partielle Integration $\quad f(x) = u'(x)\, v(x)$ Produkt

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^b dx\, u'(x)\, v(x) = \int_a^b dx\, \left((u\,v)' - v'u\right)$$

$$= u(x)\, v(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx\, v'(x)\, u(x)$$

vielleicht kann man das einfach lösen!

Bsp: $\int_a^b dx\, x\, e^{ax} = \int_a^b dx\, x \frac{d}{dx} \frac{e^{ax}}{a}$

$$= \frac{x\, e^{ax}}{a}\Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b dx \frac{e^{ax}}{a}}_{\text{einfach}}$$

b) Partialbruchzerlegung $\quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ Quotient aus Polynomen

jedes $f(x)$ kann auf Terme der Art

$$\left.\text{Polynom},\ \frac{A}{(ax+b)^n},\ \frac{Bx+D}{(cx^2+dx+e)^m}\right\}$$ Stammfkt. sind bekannt

zurückgeführt werden. (Bronstein)

Bsp: $f(x) = \frac{3x^3 - 7x + 3x + 8}{x^2 - 2x - 3}$

Partialbruchzerlegung

$$= 2x - 3 + \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+1}$$

Methode der Partialbruchzerlegung nachschlagen

c) Substitution $\quad f(x) \rightarrow y(x)$ Änderung der Funktion

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{y(a)}^{y(b)} dy\, \frac{dx(y)}{dy}\, f(x(y))$$

Bsp $\quad \int_0^{\pi} dx\, \sin x\, e^{\cos x} = ?$

$y = \cos x$

neue Integrationsvariable

Grenze: $\quad x = 0 \rightarrow y = 1 = \cos(0)$

$\quad x = \pi \rightarrow y = -1 = \cos(\pi)$

Ableitung. $\quad \frac{dy}{dx} = -\sin x$

$$\rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Funktion

$$\sin x\, e^{\cos x} = (1-y^2)^{1/2} e^{y}$$

-1

Integral:
$$\int_1^{-1} dy \, \frac{-1}{\cancel{(1-y^2)^{1/2}}} \cancel{(1-y^2)^{1/2}} \, e^y$$

$$= \int_{-1}^{1} dy \, e^y = \underline{\text{einfach!}}$$

d) Differentiation nach Parametern

$\int dx \, f(\alpha, x)$ mit α als Parameter

versuch nach α abzuleiten und Integral zu vereinfachen

Bsp:
$$\int_a^b dx \, x^n e^{\alpha x} = \int_a^b dx \, \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{\alpha x}$$

$$\underbrace{\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \underbrace{\int_a^b dx \, e^{\alpha x}}_{\text{erst rechnen}}}_{\text{dann ableiten}} = \text{einfach!}$$

e) Reihenentwicklung v. Integrand

$$\int_a^b dx \, f(g(x))$$

falls $g(x)$ als Fkt von x schnell abfällt kann

man ein Riemann-Integral endlich machen

Bsp:
$$\int_0^b dx \frac{1}{1+\underbrace{e^{-\frac{x}{a}}}_{\text{kleine Größe}}} = \int_0^b dx \Big(1 - \underbrace{e^{-\frac{x}{a}} + \cdots}_{\text{reicht vielleicht aus!}}\Big)$$

auf Intervall $[0, b]$ soll $e^{-\frac{x}{a}}$ klein sein!

$\longrightarrow \quad a \ll b$

manchmal kann man die ganze Reihe

exakt integrieren.

<u>ÜA 3</u>

$$F(x) = \operatorname{artg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

$$\text{Integral} = F(2\pi) - F(0) = 0$$

wenn man

nicht aufgepaßt