Orga: nächste VL $9^{00} - 10^{00}$!

2. Komplexe Zahlen und Fourierreihen

2.1 Komplexen Zahlen

- Motivation:

rat. Zahlen $\mathbb{Q}$ $\longrightarrow$ reellen Zahlen $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

$x^2 - 2 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 1 = 0$

DGL: $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t)$ $\qquad$ Ansatz: $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 = -\omega_0^2 \longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm\sqrt{-1}\,\omega_0$$

- Definition: i - imaginäre Einheit

$$i := \sqrt{-1}\ , \quad i^2 = -1$$

Komplexe Zahlen auffassen als Überlagerung aus reeller Zahl und imag. Zahl i.

$\mathbb{C} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\qquad$ $(a, b \in \mathbb{R})$

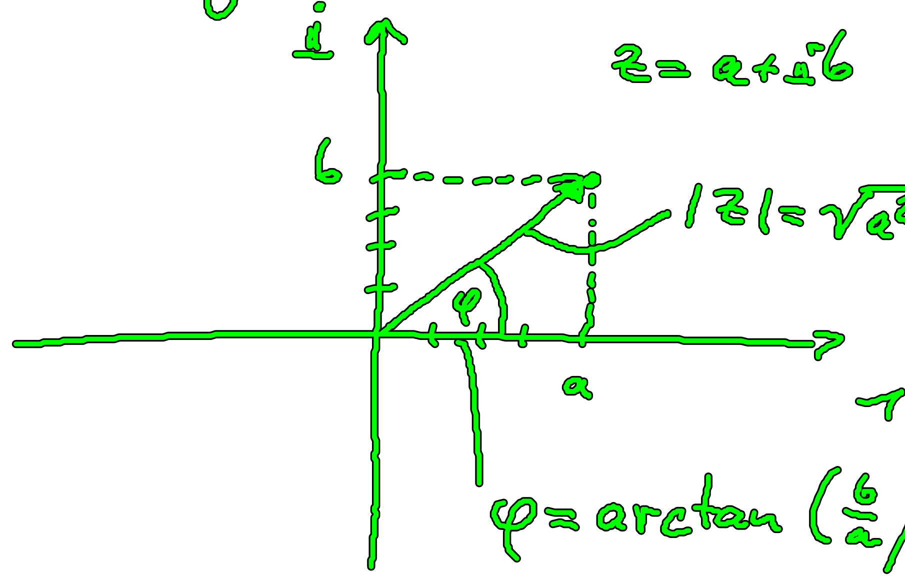
$$z = \underbrace{1a}_{\text{Realteil}} + \underbrace{i b}_{\text{Imaginärteil}}$$

Basisvektor $\binom{1}{0}$ — „Proj. in reelle Zahl"

Basisvektor $\binom{0}{1}$ — orthogonal auf 1

- Darstellung:

$z = a + ib$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{N})$

(a) karth. a, b

(b) polar Koord.

Notation:

$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a + ib) = a$

$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a + ib) = b$

$$z = a + ib = |z| \cos\varphi + i |z| \sin\varphi$$

$$= |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$= |z|\, e^{i\varphi}$$

- Rechenregeln:

(a) komplexe Exp. fkt: $e^{\pm \sqrt{-1}\, x}$ (Lsg. Oszill.)

$$e^{ix} = \sum_n \frac{1}{n!} (ix)^n$$ aufteilen gerade/ungerade Potenzen

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin(x) \quad \text{Euler Formel}}$$

(b) Zusammenhang zw. trig. und exp. Fkt

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

ÜB $\cos(ix) = \cosh(x)$, $-i\sin(ix) = \sinh(x)$

(c) Additionstheoreme

$$e^{i(x_1+x_2)} = \cos(x_1+x_2) + i\sin(x_1+x_2)$$

$$e^{ix_1} e^{ix_2} = \ldots\ldots$$ Übung

$$\to \cos(x_1+x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$$

$$\sin(x_1+x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

(d) Addition

$$z_1 \pm z_2 = a + ib \pm (c + id) = (a \pm c) \pm i(b \pm d)$$

(e) $z_1 \cdot z_2 = (a+ib)(c+id) = ac - bd$

$+i(ad+cb)$

(f) komplexe Konjugation (spiegeln an reellen Achse)

$$z^* = (a+ib)^* := a - ib \quad (i \text{ durch } -i)$$

Bsp.: $i^* = -i \qquad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* z_2^*$

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \qquad (z^*)^* = z$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

(g) Betrag

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 - i^2 b^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2}$$

(h) Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$z = \frac{1}{i\omega - \gamma} \longrightarrow \mathrm{Re}\, z = -\frac{\gamma}{\omega^2+\gamma^2} \quad \mathrm{Im}\, z = -\frac{\omega}{\omega^2+\gamma^2}$$

(i) Rechnen in Polardarstellung

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\varphi_1}}{|z_2| e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Potenzieren

$$z^n = \left(|z| e^{i(\varphi + 2\pi k)}\right)^n = |z|^n e^{i(n\varphi + 2\pi n k)}$$

Radizieren

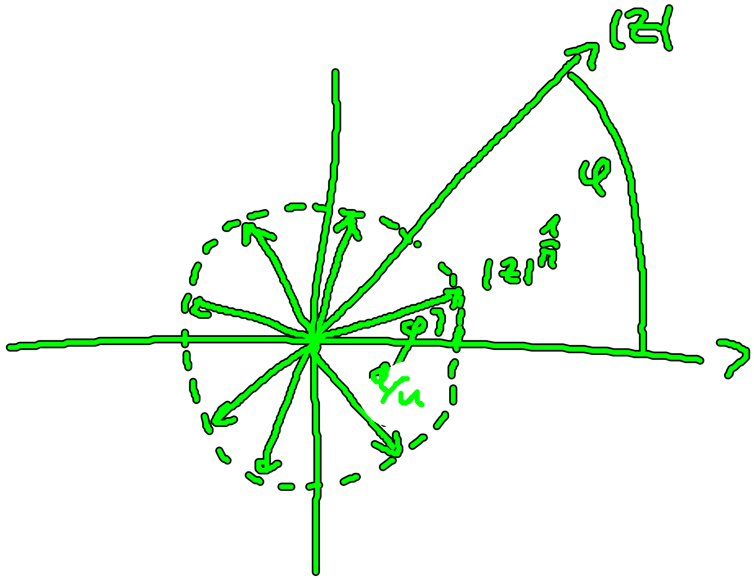
$$\sqrt[n]{z} = \left(|z| e^{i(\varphi + 2\pi k)}\right)^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \frac{k}{n}\right)}$$

$\to \sqrt{}$ ist mehrdeutig

n Lsg. um $\frac{2\pi}{n}$ verdreht

bilden n-Eck

auf Kreis $|z|^{\frac{1}{n}}$



2.2 Funktionen als Elemente eines Vektorraums

- f als Linearkomb. von Basisfkt. u_n:

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{N} c_n u_n(t)$$

$\to$ komplizierte Fkt durch Angabe v. diskreten Parametern c_n charakterisieren kann.

$\to$ einfacher c_n bestimmen

- Bsp.: $f \in C^1([a,b])$ $\quad f(x) \approx \sum^{N} c_n x^n$

$n=0$

$\longrightarrow u_n(x) = x^n$ $\quad N \to \infty$ bel. genau

oder auch $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$

- Skalarprod: $u_n, u_m : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(u_n, u_m) = \langle u_n | u_m \rangle := \int_a^b \underset{\uparrow}{g(t)}\, u_n^*(t)\, u_m(t)\, dt$$

bel. Gewicht, unabh. n, m und nicht neg.

$\longrightarrow$ erfüllt alle Anforderungen an Skalarprod. (ÜB)

Damit u_n eine Basis darstellen, muss gelten:

(a) Orthogonalität

$$\langle u_i | u_j \rangle = \int_a^b u_i^*(t)\, u_j(t)\, dt = \alpha\, \delta_{ij}$$

Kronecker-delta: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$

(b) Normierung

$$\tilde{u}_i := \frac{1}{\sqrt{\alpha}} u_i \longrightarrow \langle \tilde{u}_i | \tilde{u}_j \rangle = \delta_{ij}$$

(c) Vollständigkeit

Delta-Funktion

$$\sum_n \tilde{u}_n^*(t)\, u_n(t') = \delta(t - t')$$

- Komponenten: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(t) \quad \Big| \cdot u_m^*(t)$

$$u_m^*(t) f(t) = \sum c_n u_m^*(t) u_n(t) \quad \Big| \int dt$$

$$\int dt\, u_m^*(t) f(t) = \sum_n c_n \underbrace{\int dt\, u_m^*(t) u_n(t)}_{\delta_{mn}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle u_m | f \rangle = c_m}$$

Die $\{c_n\}$ repräsentieren die Fkt f in der Basis $\{u_i\}$.
Für andere Basis sehen die Koeffizient anders aus.

- Skalarprod: $\langle g | f \rangle = \langle \sum_i b_i u_i , \sum_j c_j u_j \rangle$

$$= \sum_{ij} b_i^* c_j \underbrace{\langle u_i | u_j \rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$\langle g | f \rangle = \sum_i b_i^* c_i \longrightarrow \langle f | f \rangle = \sum_i |c_i|^2$$

- Analogie zum $\mathbb{R}^3$:

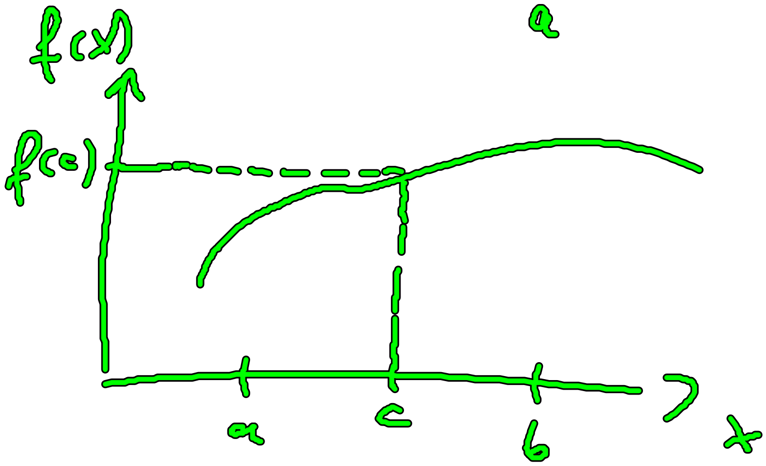
$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} \quad (i,j = 1,2,3)$$

(a) Komponenten: $\underline{V} = \sum_{i=1}^{3} v_i \underline{e}_i$ mit $v_i = \underline{e}_i \cdot \underline{V}$

(b) Skalarprod: $\underline{V} \cdot \underline{W} = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i$

2.3 Die Deltafunktion

• Definition:
$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-c)\,dx = \begin{cases} f(c) & c\in[a,b] \\ 0 & c\notin[a,b] \end{cases}$$

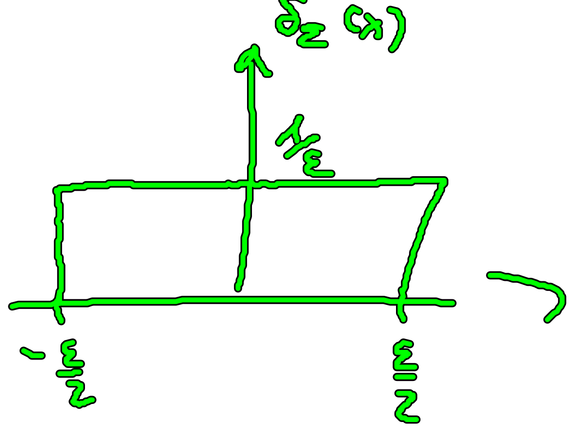


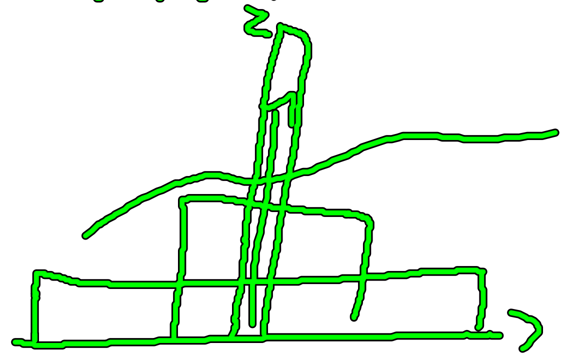
- δ-Fkt pickt einen Punkt der Fkt aus dem Integral
- ein Punkt ($dx=0$) ist kein Integral

also muss $\delta(x=c)=\infty$
$\delta(x\neq c)=0$
$(0\cdot\infty = f(c))$

• Darstellung über Funktionsschar:

(1) $$\delta_\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } -\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{für } |x| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad (\varepsilon > 0)$$





(a) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist Flächeninhalt $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\delta_\varepsilon(x) = 1$

(b) Für $\varepsilon \to 0$ erhält man δ-Fkt

(2) $$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx} \to \left.\frac{e^{ikx}}{ix}\right|_{-\infty}^{+\infty} \text{↯}$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx}\, e^{-|k|\varepsilon} \overset{\ddot{U}B}{=} \dots = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(x) \to \delta(x) \quad \text{(Lorentzkurve)}$$

(3) $\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}, \quad \frac{\varepsilon}{\pi x^2}\sin^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \dots$

- mathematisch: Distributionskalkül

„lineares Funktional auf $C_0^\infty(\mathbb{R})$"

$$\delta : C_0^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\delta_c[f] := \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\,\delta(x-c) = f(c)$$

- Beispiel: Massendichte einer Pkt.masse am Ort $\underline{r}_0$

$$m = \int d^3r\, \rho(r)$$

← Integral über Raum u. Massendichte ergibt die ganze Masse

Ort $\underline{r}_0$ ∞-klein

Massendichte $= \underbrace{\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = \frac{\text{endl.}}{0}}_{\rho(\underline{r}) = m\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_0)}$

$$m = \int d^3r\, m\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = m$$

- kontinuierliches Kronecker δ:

$$\delta_{j,k} \quad (j \neq k) \quad \longleftrightarrow \quad \delta(x-y) = 0 \quad (x \neq y)$$

$$\sum_k \delta_{j,k} = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(x-y)\, dx = 1$$

$$\sum_k a_k \delta_{jk} = a_j \quad \longleftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(x-y) f(x)\, dx = f(y)$$

- Rechenregeln:

(1) $[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}$ ← Dimension

(2) $\delta(-x) = \delta(x)$

(3) $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$

(4) $\delta(x^2 - x_0^2) = \frac{1}{2|x_0|} \left(\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0) \right)$

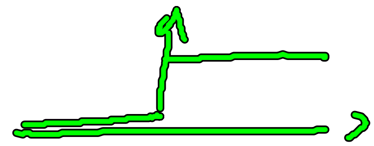
(5) $\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n)$ $\quad x_n$: Nullstelle von $f(x)$

(6) $\int dx\, f(x)\, \delta'(x) = -f'(x=0)$

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) = 1$

(8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y)\, \delta(x-z)\, dx = \delta(y-z)$

(9) $\partial_x \Theta(x) = \delta(x)$ mit $\Theta(x) := \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta'(x)\, \underset{\substack{\uparrow \\ f(\infty)=f(-\infty)=0}}{f(x)}\, dx \overset{\text{part. Int.}}{=}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\, f'(x)\, dx$$

$$= -\int_{0}^{\infty} 1\, f'(x)\, dx = f(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, f(x)\, dx$$

2.4 Fourierdarstellung von Funktionen

· Beispiel: komplexe Oszillatorgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x = 0$$

Ansatz: $x(t) = x_0\, e^{i\omega t}$ löst Gl.

$$\longrightarrow -\omega^2 + \omega_0^2 = 0 \longrightarrow \omega = \pm \omega_0$$

$x(t) = a\, e^{i\omega_0 t} + b\, e^{-i\omega_0 t}$ ist Lsg

• Frage: Kann man Fkt.-en $f(t)$ über $e^{i\omega t}$ darstellen?
Ja, wenn

(a) $f(t)$ T-periodisch ist: $f(t) = f(t+T)$

$$\rightarrow \boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\omega_n t} \qquad \text{mit } \omega_n = \frac{2\pi n}{T}}$$

„Fourier-Reihe"

(b) f quadrat-integrabel ist: $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \text{endlich}$

$$f(t) = \int d\omega \, f(\omega) \, e^{i\omega t}$$

„Fourier-Integral"

• Fourier-Reihe:

Werkzeug in Physik, Informatik, Elektro- und Nachrichtentechnik

Idee: Jede Fkt. enthält Anteile von bestimmten Schwingungen.

Basisfunktion: $u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \, e^{i n \frac{2\pi}{T} t}$

↖ Normierung

(a) Orthonormalität

$$\langle u_m | u_n \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} dt \, \frac{e^{-i m \frac{2\pi}{T} t}}{\sqrt{T}} \, \frac{e^{i n \frac{2\pi}{T} t}}{\sqrt{T}}$$

$$\overset{\text{ÜB}}{=} \ldots = \delta_{m,n}$$

(b) Vollständigkeit

$$\sum_n u_n^*(t)\, u_n(t') = \frac{1}{T} \sum_n e^{-i n \frac{2\pi}{T} t} \, e^{i n \frac{2\pi}{T} t'}$$

$$\overset{\text{ÜB}}{=} \ldots = \begin{cases} \infty & \text{für } t' = t + nT \\ 0 & \text{für } t' \neq t \end{cases}$$

$$= \delta(t - t')$$

- Ansatz: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n u_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i n \frac{2\pi}{T} t}$

nicht da, steckt dann in c_n

- Komponente:

$$c_m = \langle u_m | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \, e^{-i m \frac{2\pi}{T} t} f(t)$$

Sind Gewichtungsfaktoren, die sagen, wie stark eine Oszillation mit Frequenz $\frac{2\pi n}{T}$ enthalten ist.

- Eigenschaften:

(a) $f(t)$ reell $\rightarrow$ $c_n = c_{-n}^*$

(b) $f(t)$ gerade $\rightarrow$ reine Kosinusreihe

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{c_0}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

(c) $f(t)$ ungerade $\rightarrow$ reine sin-Reihe

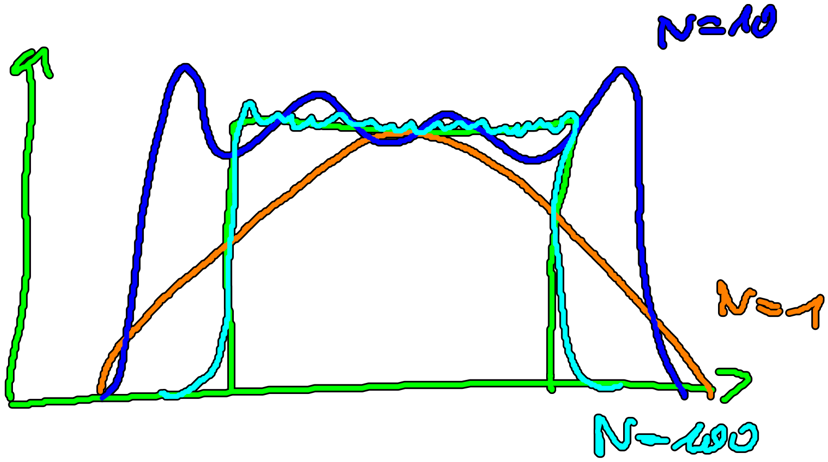
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)$$

(d) Parsevaltheorem: $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt\, |f(t)|^2 = \sum_n |c_n|^2$

(e) $$\sum_n e^{i n \frac{2\pi}{T} t} = \sum_n \delta(t - 2\pi n)$$

(f) die Fourierreihe einer Fkt. f konvergiert gegen

$$\begin{cases} f(x_0) & f \text{ in } x_0 \text{ stetig} \\ \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)\right) & f \text{ in } x_0 \text{ unstetig} \end{cases}$$



$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} x\right)$$