2.5. Anwendungsbeispiel f. Fourierreihe:

Lösen linearer Differentialgleichungen

einfachstes Bsp (bekannt aus Exp.-Physik)

harmonischer Oszillator mit periodischer Kraft

$f(t) = f(t+T)$

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) - \gamma x(t) = f(t) = \sum_n f_n e^{i\omega_n t}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

Fourieransatz: $x(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}$

einsetzen in die Dgl:

$$\sum_n \big(\underbrace{-\omega_n^2}_{= (i\omega_n)^2} + \omega_0^2 - i\gamma\omega_n \big) c_n e^{i\omega_n t} = \sum_n f_n e^{i\omega_n t}$$

$\left\{ e^{i\omega_n t} \right\} \rightarrow$ linear unabhängig

$$\sum_n \underbrace{\left[\left(-\omega_n^2 + \omega_0^2 - i\omega_n \gamma \right) c_n - f_n \right]}_{=0} e^{i\omega_n t} = 0$$

$\Downarrow$ nach c_n umstellen

$$\Downarrow \quad c_n = \frac{f_n}{-\omega_n^2 + \omega_0^2 - i\omega_n \gamma}$$

gesuchte Größen um $x(t)$ zu berechnen

Lösg. gegeben als

$$x(t) = \sum_{n=\infty}^{+\infty} \frac{f_n}{-\omega_n^2 + \omega_0^2 - i\omega_n \gamma}$$

Voraussetzg. ist Kenntnis der Kraft $f(t)$ als Fourierreihe ($f_n = ?$)

$$f(t) = \bar{f} \cos(\underline{\underline{\omega}}\, t)$$

$\underline{\underline{\omega}}$ – Frequenz der exter. Kraft

Konstante

f(t) als Fourierreihe

$$\bar f \cos(\omega t) = \underbrace{\bar f\left(\frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}\right)}_{\text{ergibt sofort die Koeffizient der Fourierreihe}}$$

$$\to x(t) = \frac{\bar f}{2}\,\frac{e^{+i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega} + c.c.$$

kann vereinfacht werden ÜA:

Schönere Darstellg.

$$x(t) = \bar f\,\frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2\right]^{1/2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2\right]^{1/2}}$$

Lösung der Dgl. f. den harmonischen Oszillator

$$\ddot x + \omega_0^2 x - \gamma\dot x = \bar f\cos(\omega t)$$

ist gegeben durch eine Schwingg. mit Phase.

(Newtonsche Glchg. f. Federschwingung mit Dämpfg. + extern Kraft)

Bemerkungen:

a) ω_0, γ : sind vorgegeben durch Schwinger und Dämpfg.

ω als Kraftfrequenz kann eingestellt werden

Lösg. schwingt mit ω, aber hat ein Phasenverschiebg. φ

b) $\omega \to 0$ $\hat{=}$ sehr langsame Kraft

$\cos\varphi \to 1$ $\Rightarrow$ $\varphi = 0$

Oszillator folgt einfach der Kraft

c) $\omega \to \infty$ $\hat{=}$ sehr schnelle Kraft

$\cos\varphi \to -1$ $\Rightarrow$ $\varphi = \pi$

$$x(t) \to \bar{f} \; \frac{\cos(\omega t + \pi)}{\omega^2} \to 0$$, weil ω sehr groß

Kraft ist zu schnell f. Oszillator,

die Auslenkg. geht gegen Null

d) $\omega \to \omega_0$ „Resonanzfall"

weil ω_0 ist Eigenfrequenz

$\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

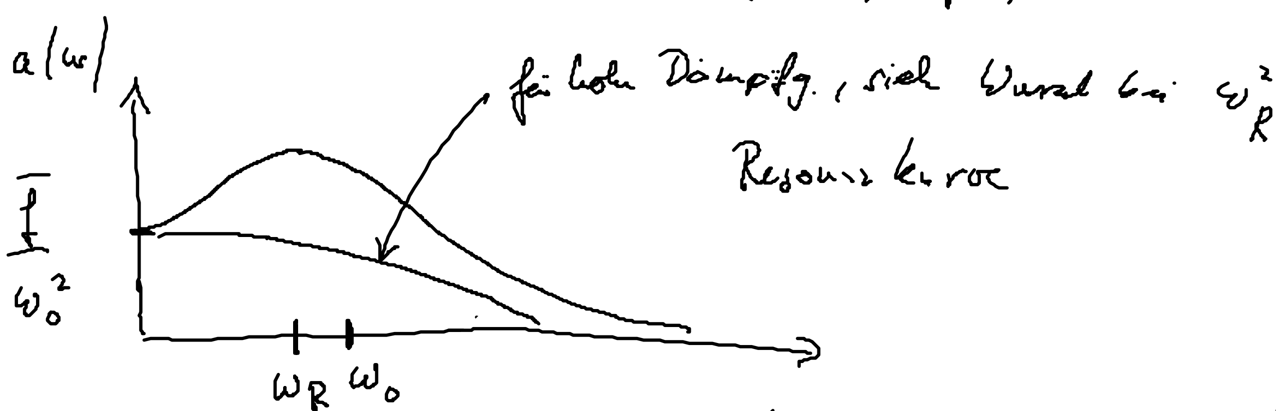
$$x(t) = \frac{\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}{\gamma\omega}$$

für Dämpfg. $\gamma \to 0$, wird $x \to \infty$

e) Allgemein Fall

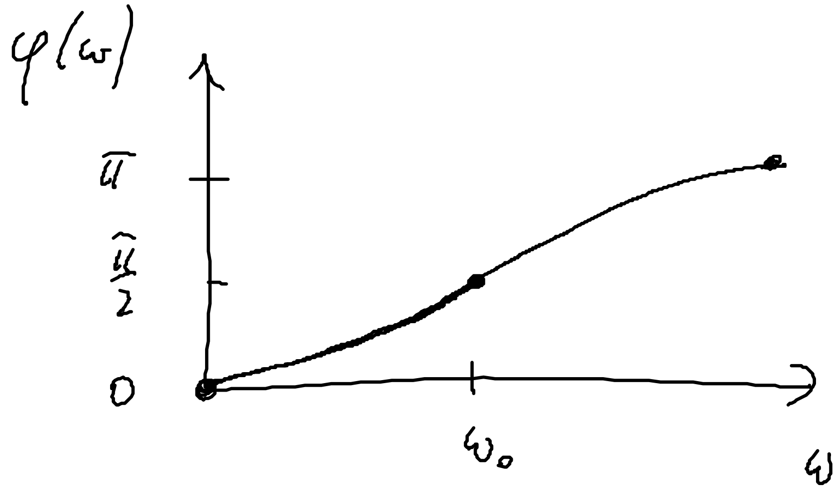
$$x(t) = a(\omega)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(\omega) = \bar{f} \Big/ \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$



Amplitude der Schwingung

Resonanzfrequenz aus $\frac{\partial a}{\partial\omega} = 0 \longrightarrow \underline{\underline{\omega_R^2}} = \frac{1}{2}\left(2\omega_0^2 - \gamma^2\right)$



Phasengang

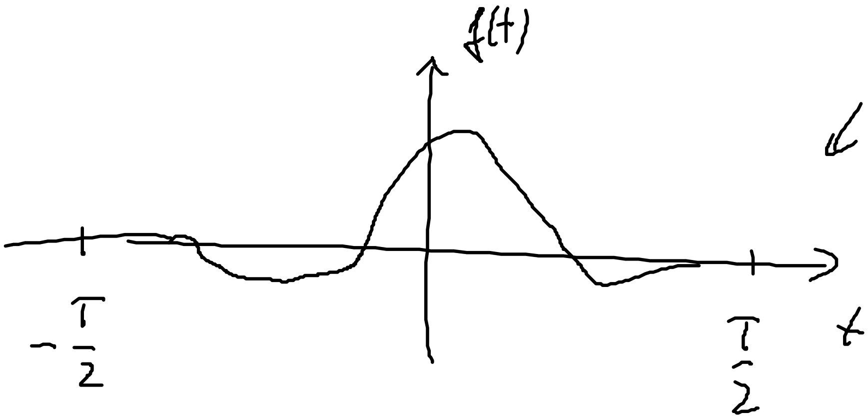
2.6. Fouriertransformation

Motivation: Spektralanalyse in Optik $\rightarrow$ $f(t) \Rightarrow \tilde{f}(\omega)$

bisher: Fourierreihe war auf periodische Funktionen beschränkt

starke Beschränkung!

nach ∞ schnell abklingen



Idee: $T \rightarrow \infty$, damit man Fourierreihe anwenden kann

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t)\, e^{-i\omega_n t}, \qquad f(t) = \sum_n c_n\, e^{i\omega_n t}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T}\, n$$

$T \to \infty$ versuchen

$$(T c_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{-i\overset{\omega}{\Updownarrow}{\omega_n} t} \equiv \tilde{f}(\omega)$$

Fouriertransformierte von $f(t)$

<u>Def</u> : $$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{-i\omega t}$$

Summe über Frequenzen ω_n

$$f(t) = \sum_n c_n\, e^{i\omega_n t} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\, \underline{\underline{\frac{2\pi}{T}}} \sum_n \underbrace{(c_n T)}_{\tilde{f}(\omega)}\, e^{i\frac{n 2\pi}{T} t}}_{}$$

für kleine Schritte: Abstand zwischen ω_n und ω_{n+1}

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$\Delta\omega \to 0$ für $T \to \infty$, $\omega = \frac{2\pi}{T} n = \Delta\omega\, n$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_n \Delta\omega \, \tilde{f}(\omega) \, e^{in\Delta\omega t} \qquad \Delta\omega \to 0$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \tilde{f}(\omega) \, e^{i\omega t}$$

$$\left(= \sum_n c_n \, e^{i\omega_n t} \right)$$

Fourierreihe

Spektralwerte: $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, f(t) \, e^{-i\omega t}$ ist

die Fouriertransformierte der Funktion $f(t)$ im Frequenzraum

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \tilde{f}(\omega) \, e^{i\omega t}$$

ist die Fourierdarstellung der Funktion $f(t)$.

$$f(t) \underset{\text{Rücktrafo}}{\overset{\text{Hintrafo}}{\rightleftarrows}} \tilde{f}(\omega)$$

Zeitraum

Fourierraum

Zurück zu Bsp:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) + \mu\, \dot{x}(t) = f(t)$$

bisher für periodische Fkt.

Lösg. jetzt f. beliebige Fkt. $f(t)$ angeben:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\, \tilde{x}(\omega) \quad \text{als Ansatz}$$

Ansatz als Fourierintegral

$\boxed{\text{beim Einsetzen kommt } 1\times\ i\omega \text{ nach unten für jede Zeitableitung}}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \underbrace{\left\{ \left(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\omega\mu \right) \tilde{x}(\omega) - \tilde{f}(\omega) \right\}}_{=0} e^{i\omega t} = 0$$

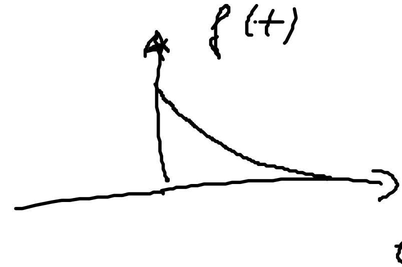
$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{} \quad \rightarrow \text{ für beliebig } f(t)$$

$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$ bei dem FT existiert

Fouriertransformation v. Funktionen

a) Exponential fkt.

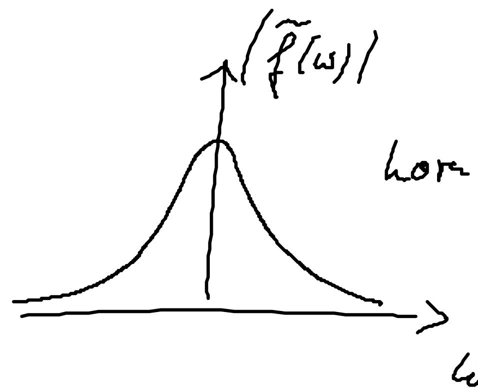
$a_0 e^{-\gamma t}$



$$\tilde{f}(\omega) = a_0 \int_0^\infty dt\, e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}$$

$$= a_0 \left. \frac{e^{-(\gamma + i\omega)t}}{-(\gamma + i\omega)} \right|_0^\infty = a_0 \frac{1}{\gamma + i\omega}$$

$$|\tilde{f}(\omega)|^2 = \frac{|a_0|^2}{\gamma^2 + \omega^2}$$



Lorentzkurve

b) FT von Gauß → Gauß

c) FT einer δ-Fkt → Konst.

d) FT einer Konst → δ-Fkt.