

## 2.5. Anwendungsbeispiel f. Fourierreihe:

### Lösen linearer Differentialgleichungen

einfaches Bsp (bekannt aus Exp.-Physik)

harmonischer Oszillator mit periodischer Kraft

$$f(t) = f(t + T)$$

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) - \gamma \dot{x}(t) = f(t) = \sum_n f_n e^{i\omega_n t}$$

$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$

Fourieransatz:  $x(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}$

einsetzen in die Dgl:

$$\sum_n \left( -\omega_n^2 + \omega_0^2 - i\gamma \omega_n \right) c_n e^{i\omega_n t} = \sum_n f_n e^{i\omega_n t}$$

$\omega_n$   
 $(\omega_n)^2$

$\{ e^{i\omega_n t} \} \rightarrow$  linear unabhängig

$$\sum_n \underbrace{\left[ (-\omega_n^2 + \omega_0^2 - i\omega_n \gamma) c_n - f_n \right]}_{=0} e^{i\omega_n t} = 0$$

$\downarrow$  nach  $c_n$  umstellen

$$\downarrow c_n = \frac{f_n}{-\omega_n^2 + \omega_0^2 - i\omega_n \gamma}$$

gesuchte Größe  $u = x(t)$  in berechnen

Lösung gegeben als

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n}{-\omega_n^2 + \omega_0^2 - i\omega_n \gamma}$$

Voraussetzung: ist Kenntnis der Kraft  $f(t)$  als Fourierreihe ( $f_n = ?$ )

$$f(t) = \int \cos(\omega t) \quad \omega - \text{Frequenz des ersten Kraft}$$

$\uparrow$   
Kontinuum

$$f(t) \text{ als Fourierreihe } f(\cos(\omega t)) = \bar{f} \left( \frac{1}{2} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} e^{-i\omega t} \right)$$

ergibt sofort die  
Koeffizient der Fourierreihe

$$\rightarrow x(t) = \int \frac{e^{+i\omega t}}{2(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} + \text{c.c.}$$

kann vereinfacht und UA:

Schöne Darstellung.

$$x(t) = \int \frac{\cos(\omega t + \varphi)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]^{1/2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]^{1/2}}$$

Lösung der Dgl. f. den harmonischen Oszillator

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \gamma \dot{x} = \int \cos(\omega t)$$

ist genau das eine Schwingg. mit Phase.

(Newtonsche folg. f. Federschwinger mit Dämpfung + extern Kraft)

## Bemerkungen:

a)  $\omega, \gamma$ : sind vorgegeben durch Schwinger und Dämpf.

$\omega$  als Kraft frequenz kann eingestellt werden

Lösg. schwingt mit  $\omega$ , aber hat ein Phasenverhältnis  $\varphi$

b)  $\omega \rightarrow 0 \hat{=} \text{sehr langsamer Kraft}$

$$\cos \varphi \rightarrow 1 \quad \downarrow \quad \varphi = 0$$

Oszillator folgt einfach der Kraft

c)  $\omega \rightarrow \infty \hat{=} \text{sehr schnelle Kraft}$

$$\cos \varphi \rightarrow -1 \quad \downarrow \quad \varphi = \pi$$

$$x(t) \rightarrow \frac{\bar{f}}{\omega^2} \cos(\omega t + \bar{\varphi}) \rightarrow 0, \text{ weil } \omega \text{ sehr groß}$$

Kraft ist zu schnell f. Oszillator,  
der aus Lenkz. geht gegen Null

d)  $\omega \rightarrow \omega_0$ , Resonanzfall

weil  $\omega_0$  ist Eigenfrequenz

$$\cos \varphi = 0 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

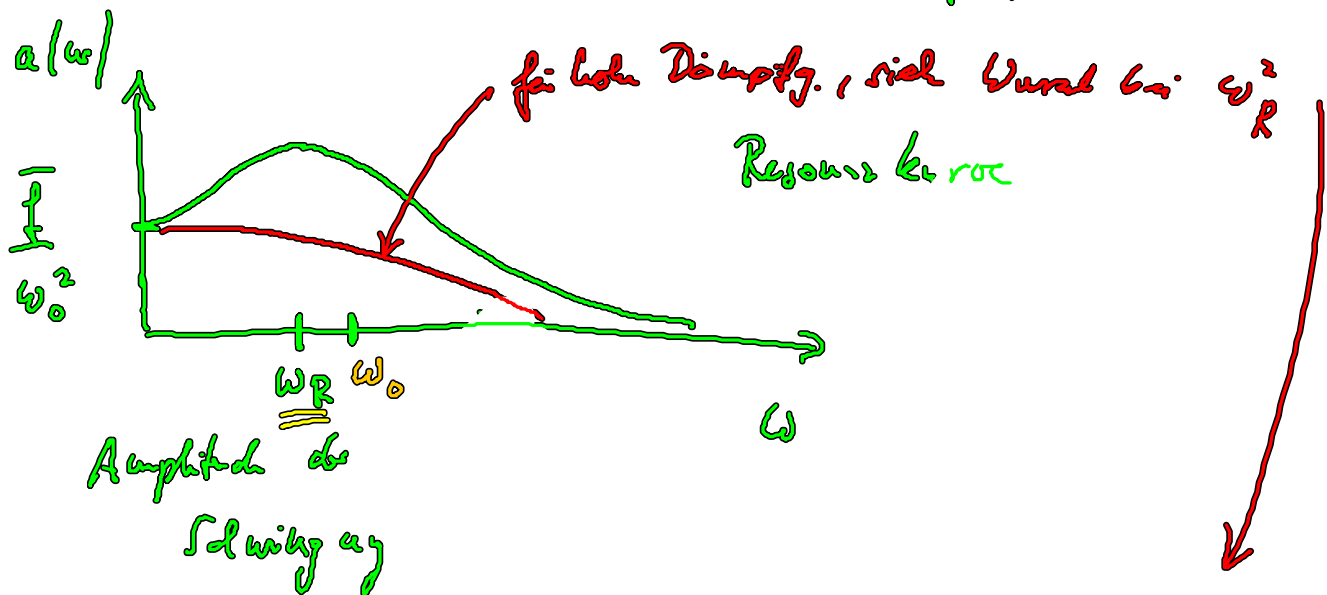
$$x(t) = \frac{\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})}{\gamma \omega}$$

für Dämpf.  $\gamma \rightarrow 0$ , ist  $x \rightarrow \infty$

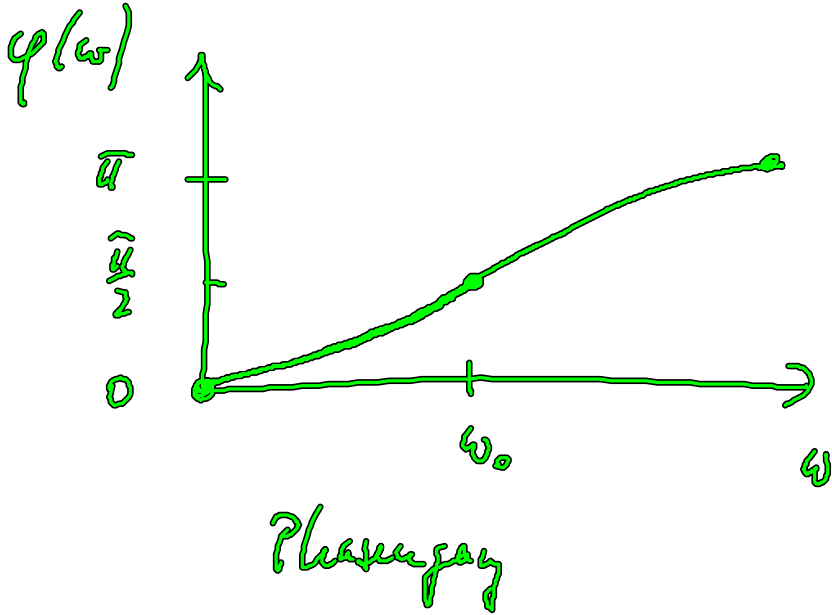
### e) Allgemeiner Fall

$$x(t) = a(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}}$$



Resonanzfrequenz aus  $\frac{\partial a}{\partial \omega} = 0 \rightarrow \omega_R^2 = \frac{1}{2}(2\omega_0^2 - \gamma^2)$

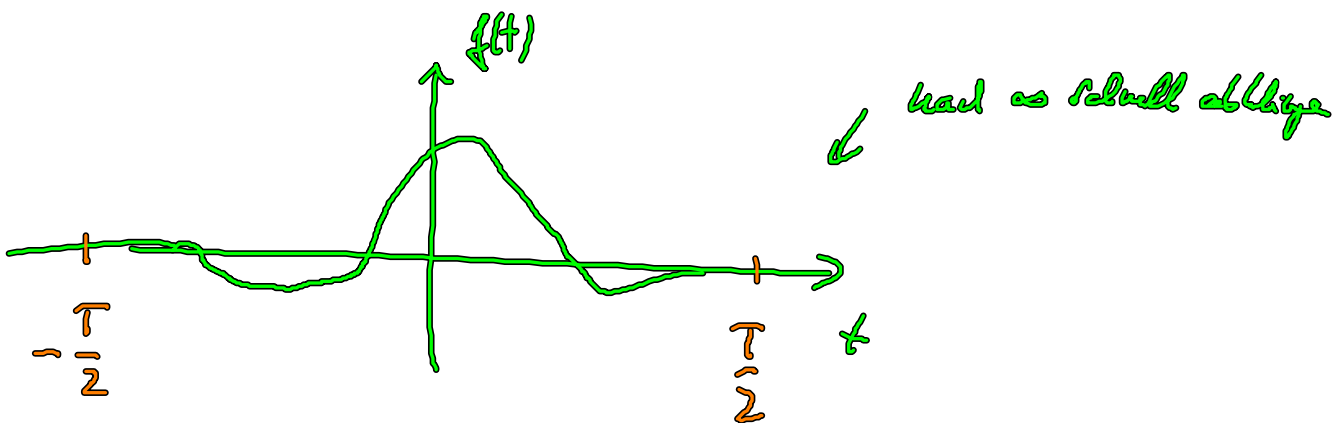


## 2.6. Fouriertransformation

Motivation: Spektralanalyse in Optik  $\rightarrow f(t) \Rightarrow \tilde{f}(\omega)$

bisher: Formeln nur auf periodische Funktionen beschränkt

Starke Beschränkung!



Idee:  $T \rightarrow \infty$ , damit man Formeln anwenden kann

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt f(t) e^{-i\omega_n t}, \quad f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

$T \rightarrow \infty$  gerade

$$(T c_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega_n t} \equiv \tilde{f}(\omega)$$

Fourier transformierte von

$f(t)$

Def:  $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}$

Sammle über Frequenzen  $\omega_n$

$$f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{T} \sum_n (c_n T) e^{i \frac{2\pi}{T} n t}$$

$\tilde{f}(\omega)$

f: klare Schritte:

Abbild zwischen

$\omega_n$  und  $\omega_{n \mp 1}$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Delta\omega \rightarrow 0 \quad f: \quad T \rightarrow \infty, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} n = \Delta\omega n$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_n \Delta\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \quad \Delta\omega \rightarrow 0$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}$$

$$\left( = \sum_n c_n e^{i\omega_n t} \right)$$

Fourier mit

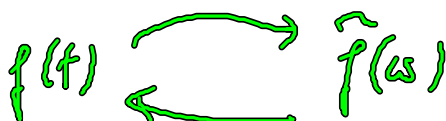
Spiegelverkehr:  $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}$  ist

die Fouriertransformation des Fehlers  $f(t)$  im Frequenzraum

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}$$

ist die Fourierdarstellung des Fehlers  $f(t)$ .

Hinrichtung



Zeitraum

Rückrichtung

Frequenzraum



Zurück zu Bsp:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \mu \dot{x}(t) = f(t)$$

↗  
wobei  $f$ : periodisch Fkt.

Lösung gibt f. beliebige Per.  $f(t)$  sagt:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} \tilde{x}(\omega) \quad \text{als Ansatz}$$

Ansatz als Fourierintegral

beim Einsetzen kommt  $\propto i\omega$  nach unten für jede Zeitableitung.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{ (-\omega^2 + \omega_0^2 + i\omega\mu) \tilde{x}(\omega) - f(\omega) \right\} e^{i\omega t} = 0$$

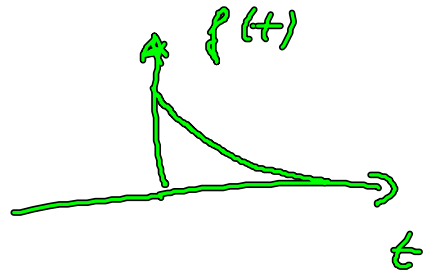
$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{-\omega^2 + \omega_0^2 + i\omega\mu} \rightarrow \text{für beliebige } f(t)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$$

bei dem FT existiert

Fouriertransformation v. Fktionen

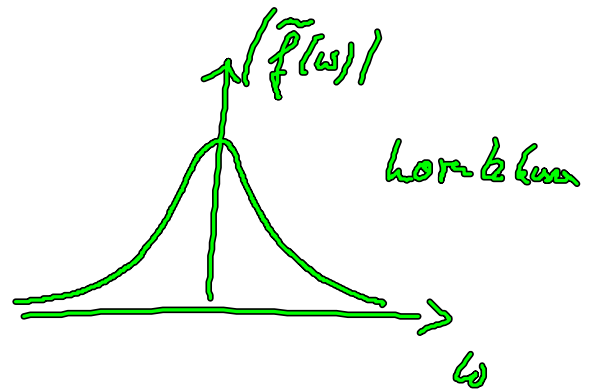
a) Exponentialfkt.  $a_0 \cdot e^{-\gamma t}$



$$\tilde{f}(\omega) = a_0 \int_0^{\infty} dt e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}$$

$$= a_0 \frac{e^{-(\gamma + i\omega)t}}{-(\gamma + i\omega)} \Big|_0^{\infty} = a_0 \frac{1}{\gamma + i\omega}$$

$$|\tilde{f}(\omega)|^2 = \frac{(a_0)^2}{\gamma^2 + \omega^2}$$



b) FT von  $f_{\text{unreg}}$   $\rightarrow$   $f_{\text{reg}}$

c) FT einer  $\delta$ -Fkt  $\rightarrow$  konst.

d) FT einer konst.  $\rightarrow$   $\delta$ -Fkt.