3. Vektoren: Darstellung, Ableitung, Produkte

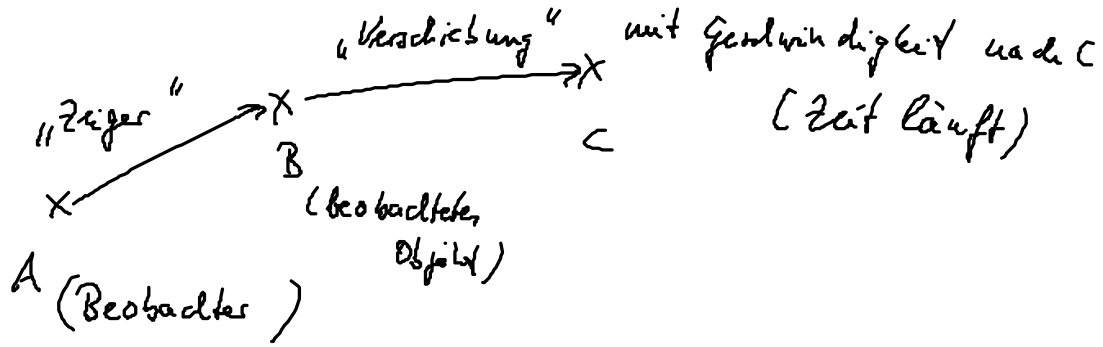
- bisher: skalare Funktionen (Zahlen)
- oft aber Beschreibung gerichteter Größen (Betrag, Richtung) nötig
- über „Pfeile" können
  - Zeiger zu Orten
  - Verschiebung von Punkten
  - Geschwindigkeit von Punkten

  dargestellt werden

$\Rightarrow$ Begriff „Vektor"

3.1. Schrittweises Erschließen d. Vektorbegriffs

Bewegung eines Punkts

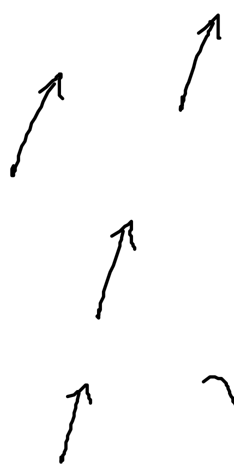


Es erscheinen: gerichtete Strecken $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\dfrac{\overrightarrow{BC}}{\text{Zeitdifferenz}}$

Beschreibg. mit Vektorbegriff
(Ortsvektor, Vektorfeld, Ableitung)

a) Vektoren sind Verschiebungen die mit Betrag (Länge ein Pfeils) und Richtung (Pfeilspitze) beschrieben werden ⇒ Darstellg. als Pfeile

Forderung: alle Pfeile der durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehend Pfeile stellen denselben Vektor dar

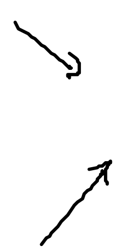


Vektoren können parallel verschoben werden

⤷ Repräsentanten desselben Vektors

b) Addition von Vektoren soll mögl. sein:

$\vec{a}_1$ können hintereinander ausgeführt werden als Verschiebg.

$\vec{a}_2$ $\qquad \vec{a}_1 + \vec{a}_2 =$  $=$  $= \vec{a}_3$

Reihenfolge ist egal $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_2 + \vec{a}_1 = \vec{a}_3$

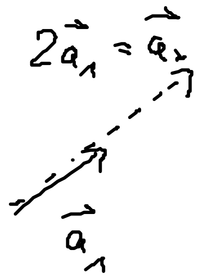
(Parallelogrammregel gilt)

c) Multiplikation mit Zahl

$\hat{=}$ Verlängerung / Verkürzung um Faktor c ($c > 1$, $c < 1$

negatives c bzgl.

→ Richtungsumkehrung)

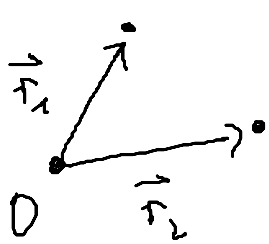


$$\vec{a}_2 = c\,\vec{a}_1$$

3.2. Beispiele f. Vektoren und Differenzieren v. Vektoren

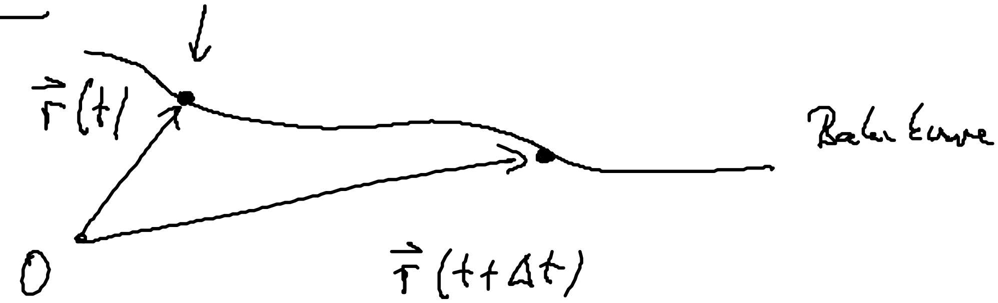
Ortsvektor: spezielle Vektoren die von einem festen Koordinatenursprung zu einem physikalisch interessanten Punkt zeigen,

d.h. ein bestimmter Repräsentant d. Vektors wird gewählt.



Geschwindigkeiten:

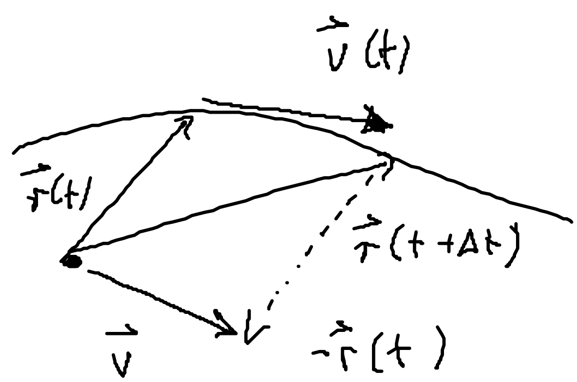
Punkt wird beobachtet, verändert Lage als Fkt. von t



$$\vec v = \left.\frac{\vec r(t+\Delta t) - \vec r(t)}{\Delta t}\right|_{\Delta t \to 0} \equiv \frac{d\vec r(t)}{dt}$$

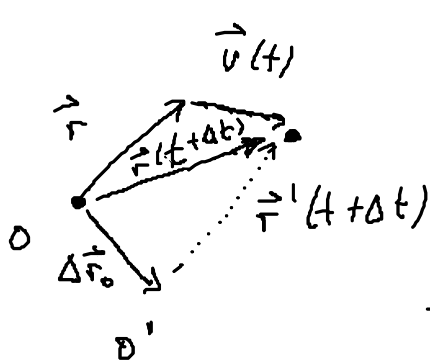
Def. der Geschwindigkeit

(a) $\vec v$ ist Verschiebung: ✓



(b) können addiert werden

Bewegg. d. Ursprungs mit $\vec v_0$ und des Objekts $\vec v$



$$\vec v' = \frac{\vec r'(t+\Delta t) - \vec r(t)}{}$$

$\nearrow \qquad\qquad \Delta t$

im bewegten System O'

$$\vec{v}\,' = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \Delta\vec{r}_0(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

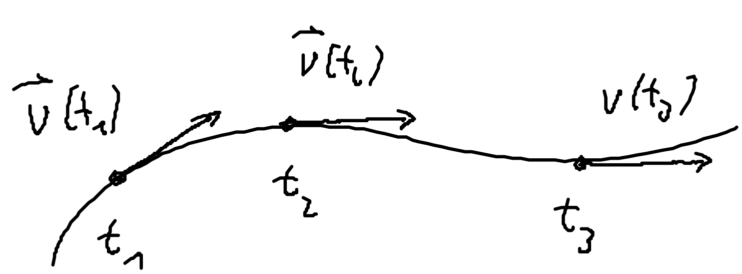
$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_0 \rightarrow \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0$$

Beobachter aufgestellt Straße (v_0) — Laufender Passagier ($\vec{v}\,'$) — Straßenbahn

→ Geschw. können sinnvoll addiert werden

Bemerkg. zu Geschwindigkeit

für $\Delta t \to 0$, also $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$



Geschwindigkeit ist Tangentenvektor an die Bahnkurve.

(c) Multiplikation mit Zahl ✓

Kräfte: Experimental physik:

Def. der Ableitg.: $\frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ (Vorgriff)

Beschleunigung: oft ist $\dot{\vec{r}}$ zeitabhängig

daher ist sinnvoll, Beschleunigg. zu definieren

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

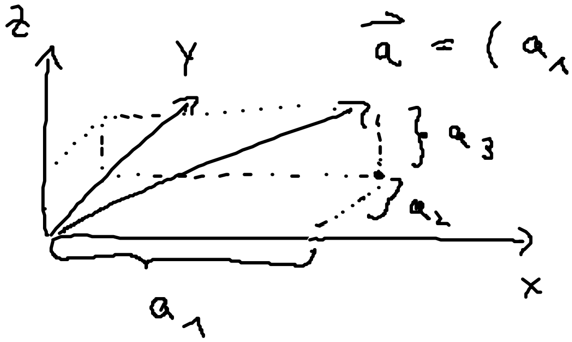
wichtig f. Newtonschen Grundgesetz:

$$\frac{d}{dt}\big(\underbrace{m\vec{v}(t)}_{\text{Impuls}}\big) = \vec{f}$$

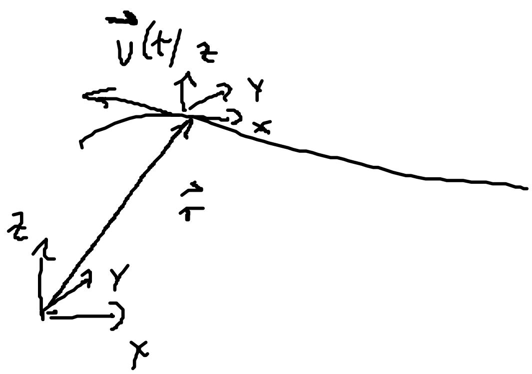
3.3. Darstellg. in kartesischen Koordinaten und mathematischer Vektorbegriff

a) Ausführg. v. Rechng. braucht wir Koordinatensystem

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$



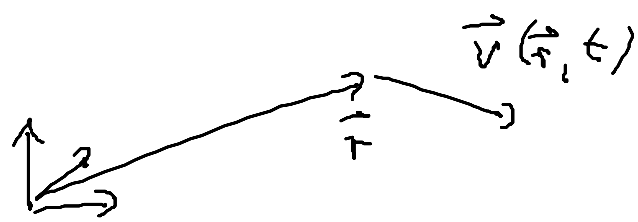
Ortsvektor: $\vec{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$



$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

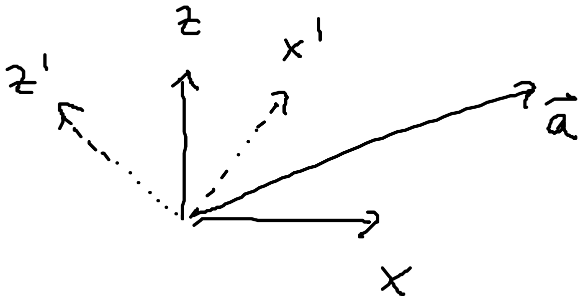
Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

später Vektorfeld: $\vec{v}(\vec{r}, t)$



b) in verschied. Koordinatensysteme muß Charakter des Vektors erhalten bleiben

Drehung eines KS: (als Bsp. 2dimensional)



$z \neq z'$

$x \neq x'$

Die Koordinaten verändern sich wenn sich KS verändert,

so daß $\vec{a}$ als geometrisch Objekt erhalten bleibt.

c) mathematische Def.

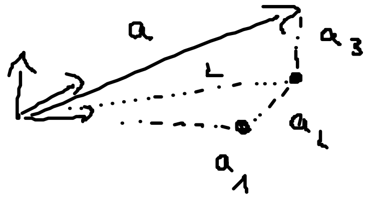
Vektoren sind Zahlentripel die sich auf ein Koordinatensystem beziehen.

Die Komponenten d. Vektors (Tripel) muß sich bei Drehungen d. Koordinatensystems so ändern,
daß der Vektor als geometrisch Objekt erhalten bleibt.

d) Bisherige Rechenoperationen im kartesisch System

(i) wenn a_1, a_2, a_3 gegeben → wie bekommt man Länge

Länge d. Pfeils (Betrag) $\equiv |\vec{a}| = a$



L Diagonale in Ebene

$$L^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$a^2 = L^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Betrag: $$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$= \sqrt{\sum_i a_i^2}$$

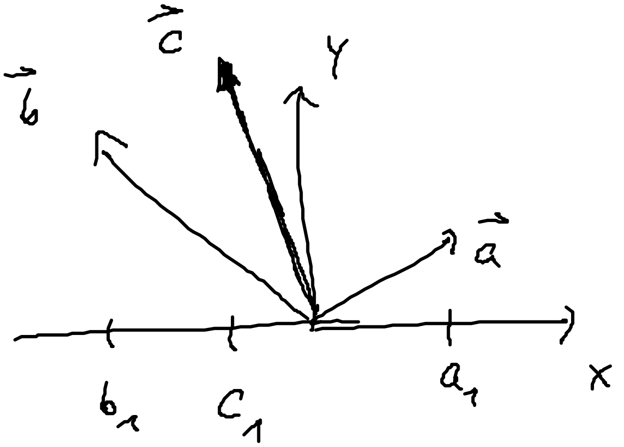
(ii) Was ist $r\vec{a}$ in Komponenten?

$$\vec{b} = r\vec{a}$$

Ansatz: $$\vec{b} = (ra_1, ra_2, ra_3)$$

$$|\vec{b}| = \Big(\sum_i b_i^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_i r^2 a_i^2\Big)^{1/2} = r|\vec{a}| \checkmark$$

(iii) Addition



$$c_1 = a_1 + b_1$$

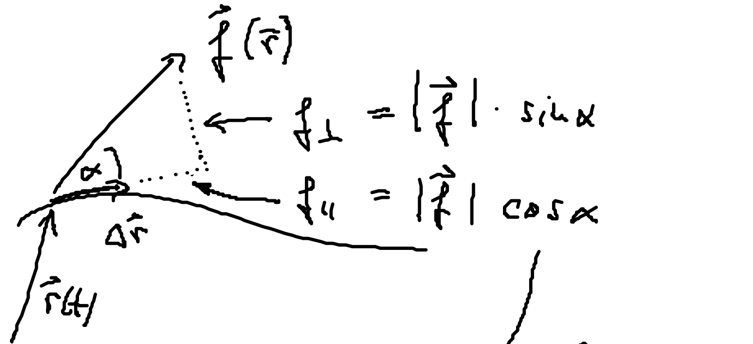
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

3.4. Vektorprodukt

3.4.1. Skalarprodukt

Motivation:



wissen: $\Delta A = |\vec{f}(\vec{r})| \, \Delta r \, \cos\alpha$

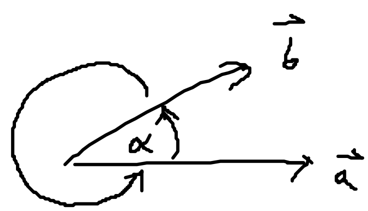
Arbeit

Weglänge

Sinn, $\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{\text{2 Vektoren}} = \underbrace{a\, b \cos\alpha}_{\text{Zahl}}$ als skalares Produkt zu definieren

$\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Eigenschaften:



a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ denn $ab\cos\alpha = ba\cos(2\pi-\alpha)$

$= ab\cos\alpha$

b) $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2\cos(0) = a^2$

$\vec{a}\cdot\vec{a}$ ist Betragsquadrat d. Vektors

c) Spezialfall $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \to a b \cos\alpha = 0$

$$a, b \neq 0 \to \alpha = \frac{\pi}{2} \quad (90°)$$

wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, so stehen die Vektoren $\perp$ aufeinander

Bsp: kinetische Energie E_{kin}

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{f} \quad | \; \dot{\vec{r}} \cdot$$

$$m \, \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}$$

wegen

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = 2 \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$$

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^{\,2}\right) = N$$

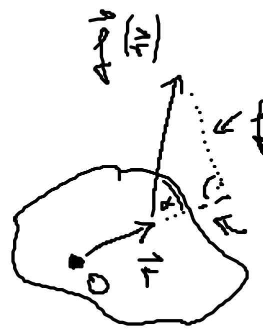
Leistung N

kinetische Energie

kann nur zeitlich geändert werden, wenn Leistung erbracht wird.

3.4.2. Vektorprodukt

Motivation: drehbar gelagerter Körper, fest in Punkt O



$f_\perp = |\vec f| \sin\alpha$

$f_\parallel = |\vec f| \cos\alpha$

Kraft kann nur mit $f_\perp$ an $\vec r$ Bewegg. hervorbringen

Drehmoment $\quad m = r f \sin\alpha$

wird als Vektor $\vec m$ definiert mit

$$\begin{cases} \text{Länge: } |\vec m| = r f \sin\alpha \\ \text{Richtg: nach rechte Hand regel} \end{cases}$$

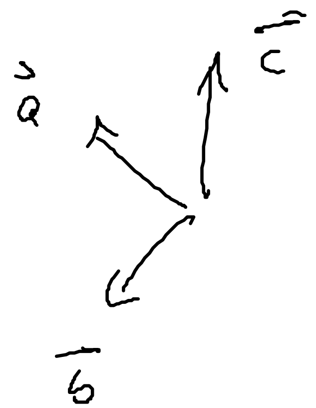
Kompakt geschrieben:

$$\vec m = \vec r \times \vec f$$

damit ist's sinnvoll Kreuzprodukt einzuführen:

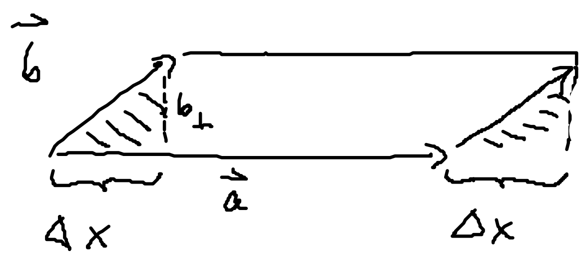
$$\underbrace{\vec c}_{\text{Vektor}} = \underbrace{\vec a \times \vec b}_{\text{2 Vektoren}} \qquad \text{(Kreuz od. Vektorprodukt)}$$

$$\vec a \times \vec b = ab \sin\alpha \; \vec c_0 \qquad \left(\text{wobei } c_0 \text{ über rechte Handregel def. } |\vec c_0| = 1\right)$$



<u>Eigenschaften</u>:

(i) $|\vec a \times \vec b|$ stellt Fläche des von $\vec a, \vec b$ eingeschlossenen Parallelogramms dar



$|\vec a \times \vec b| = b_\perp a$ = Rechteck

(ii) $\vec a \times \vec b \neq \vec b \times \vec a$

$\vec a \times \vec b = -\vec b \times \vec a$

(iii) $\vec a \times \vec a = 0 \qquad \sin 0 = 0$

2 Vektoren mit Kreuzprodukt 0 sind $\parallel$

$$\vec a \times \vec b = 0 \quad \to \quad \vec a \parallel \vec b$$

(iv) $\vec a \times (\vec b + \vec c) = \vec a \times \vec b + \vec a \times \vec c$

<u>Beispiel aus Mechanik</u> Drehimpuls $\vec \ell$

$$m \ddot{\vec r} = \vec f \qquad \Big| \; \vec r \times$$

$$m \; \vec r \times \ddot{\vec r} = \vec r \times \vec f$$

$$m \Big(\underbrace{\dot{\vec r} \times \dot{\vec r}}_{=0} + \vec r \times \frac{d}{dt} \dot{\vec r} \Big) = \vec r \times \vec f$$

$$m \underbrace{\Big(\frac{d}{dt} \vec r \times \dot{\vec r} + \vec r \times \frac{d}{dt} \dot{\vec r} \Big)}_{\text{Produktregel}} = \vec r \times \vec f$$

$$\frac{d}{dt} \big(\underbrace{m \; \vec r \times \dot{\vec r}}_{\vec \ell} \big) = \underbrace{\vec r \times \vec f}_{\vec m}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{\ell} = \vec{m}$$

Eine zeitlich Ändg. d. Drehimpulses findet nur statt, wenn Drehmoment $\vec{m} \neq 0$ ist.

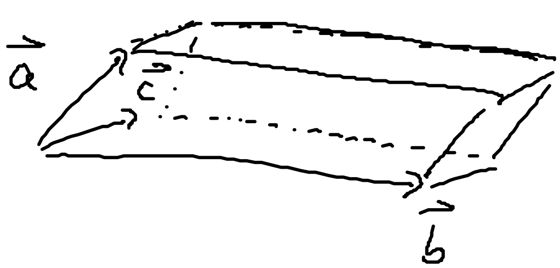
ist wied. ein Form d. Bilanzgleichungen

$$\frac{d}{dt} X(t) = Y(t)$$

wenn $Y = 0 \rightarrow X = \text{konst}$

3.3.3 Spatprodukt

Motivation 3 Vektoren spannen ein geometrisch Objekt „Parallelepiped" auf:



Volumen ist durch das Spatprodukt gegeben:

Volumen $= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$

Zyklisches Vertauschen mögl.

warum ist das so das Volumen?

$= \vec{a} \cdot \underbrace{(\vec{b} \times \vec{c})}_{\text{Grundfläche d. Objekts}}$

$\perp$ Höhe