? 2 : 1 2 : 1

ÜA: Was steht hier in schwarzer Schrift?

6.3. Volumenintegrale

a) Dreidimensionale Integrale in kartesischen Koord.

Berechnung 3d Integrale, auch über Vektorkomponenten, oft skalare Funktionen

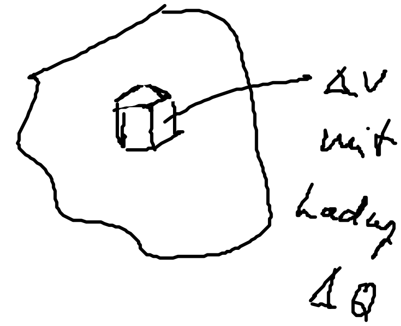
Volume V

$\phi(\vec{r})$ Skalarfeld

$\vec{v}(\vec{r})$ Vektorfeld

Bsp: Ladungsverteilung im Volumen V

$$\rho = \text{Ladungsdichte} = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \rightarrow \frac{dQ}{dV} \equiv \rho(\vec{r})$$

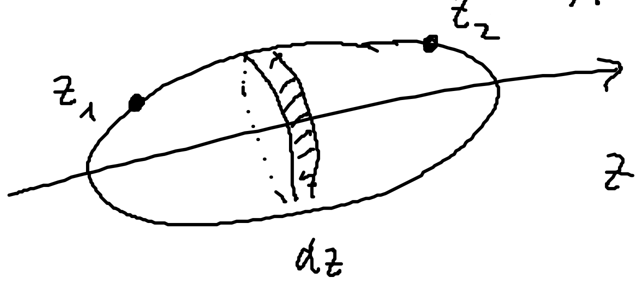


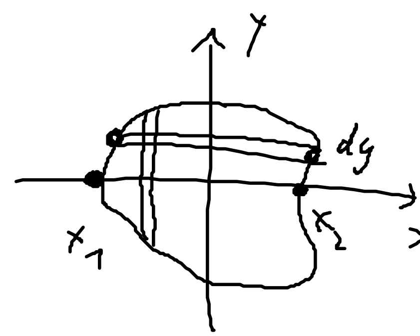
$$\curvearrowright \quad Q\Big|_{\text{Ladung in } V} = \int dV \, \rho(\vec{r})$$

Notation $\int dV \,, \; \int d^3r \,, \; \iiint d^3r \,, \; \iiint dV$

Berechnung in kartesischen Koordinaten:

$$\int d^3r \; \phi(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \;\; \phi(x,y,z)$$





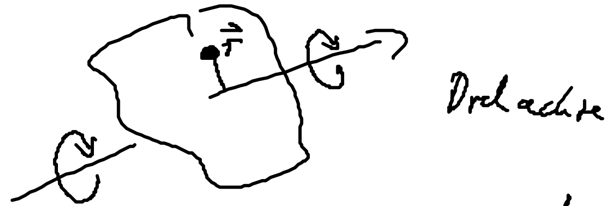
zum Ausführen d. Integrals sind die Begrenzungsflächen wichtig

$\rightarrow$ Volumenintegral auf 3 Standardintegrale zurückgeführt

b) Beispiele

(i) Trägheitsmoment

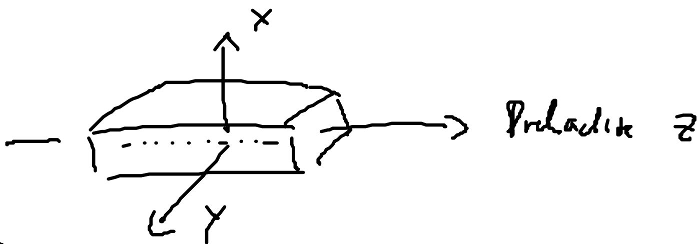
Größe um Drehung zu charakterisieren ist Trägheitsmoment I



$\rho_m = \frac{dm}{dV}$

$$I = \int d^3r \; \rho_m(\vec r) \cdot \text{Quadrat des Abstands von Drehachse}$$

Volumen Körper



Quader a, b, c

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \; \rho_m(\vec r) \; (x^2 + y^2)$$

wenn bekannt dann berechenbar

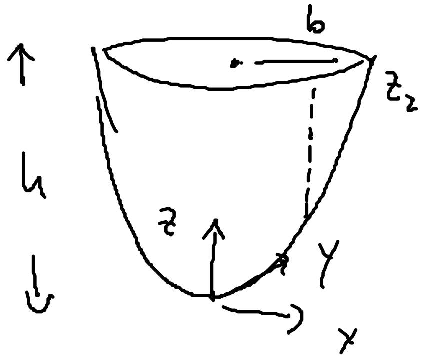
$$\rho(\vec r) = \frac{M}{V}$$ Gesamtmasse / Volumen = Konst.

$V = abc$

überall gleiche Verteilg.

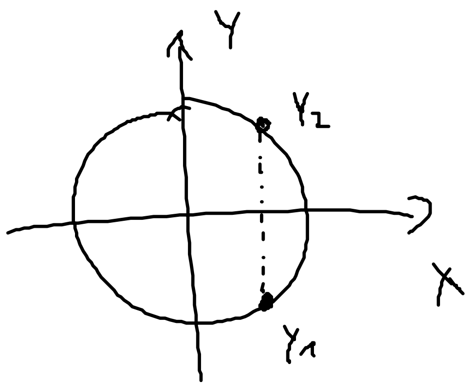
$$= \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

(ii) Volumen Paraboloid



$$z = x^2 + y^2$$

$$V = \int_{-b}^{b} dx \int_{-(b^2-x^2)^{1/2}}^{+(b^2-x^2)^{1/2}} dy \int_{z_1 = x^2+y^2}^{h} dz \; 1 = \underline{\underline{\frac{81}{2}\pi}}$$



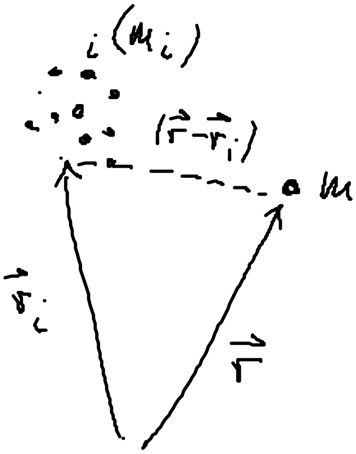
$$(h = b^2)$$

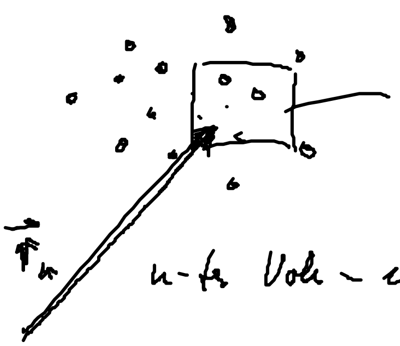
(iii) Gravitationspotential einer Masseverteilg.

$$\varphi(\vec{r}) = -\sum_i \frac{G m m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Gravitationpotential auf Masse m

alle Massepunkte m_i die auf m am Ort $\vec{r}$ wirkt





ΔV_n mit Δm_n

n-tes Volumelement

$$\varphi(\vec r) = -G m \sum_n \frac{\Delta m_n}{|\vec r - \vec r_n|} \frac{\Delta V_n}{\Delta V_n}$$

$$\Delta V_n \to 0 \qquad \frac{dm}{dV} \equiv \rho_m(\vec r\,')$$

$$= -G m \int dV' \frac{\frac{dm}{dV}}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

wieder Volumenintegral

c) Volumenintegrale in beliebigen Koordinaten (u, v, w)

Flächenelement: $\dfrac{\partial \vec r}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec r}{\partial v}$ $\qquad \vec r = \vec r(u, v, w)$

(in kartesisch $dx\,dy$)

Volumenelement: $dx\,dy\,dz$

in (u,v,w): $\underbrace{\left(\dfrac{\partial \vec r}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec r}{\partial v}\right) \cdot \dfrac{\partial \vec r}{\partial w}}$ $\equiv$ Spatprodukt

Volumenelement in gekrümmten Koordinaten

Functionaldeterminante: $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$

Zylinderkoordinaten: $dV = \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz$

Kugel —"— : $dV = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kugel mit} \\ \text{Radius } R}}{\int d^3 r} = \underbrace{\int_0^R dr\, r^2}_{\frac{1}{3}R^3} \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$\Bigg(\; x = \cos\vartheta$

$\dfrac{dx}{d\vartheta} = -\sin\vartheta$

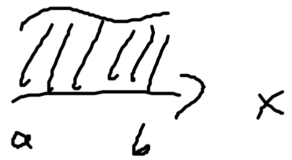
$0 \to 1$

$\pi \to -1 \; \Bigg)$

6.4. Kurze Zusammenstellung der Integrale

4

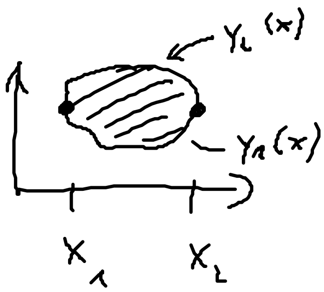
a/ gewöhnliche Integral: $\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^b dx\, \frac{dF}{dx} = F(b)-F(a)$



b/ Kurvenlängen: $\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} dr = \int_{t_1}^{t_2} dt\, v(t) \qquad v = |\dot{\vec r}(t)|$

$\vec r(t)$ Parametrisierg.

c/ ebene Flächenintegrale



$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, f(x,y)$$

Volumenintegrale analog

bei beiden gehen auch krummlinige Koord. Funktionaldeterminanten beachten.

d/ Oberflächenintegrale

$$\int d\vec{A} \begin{pmatrix} \times \\ \cdot \end{pmatrix} \vec{v}(\vec{r})$$

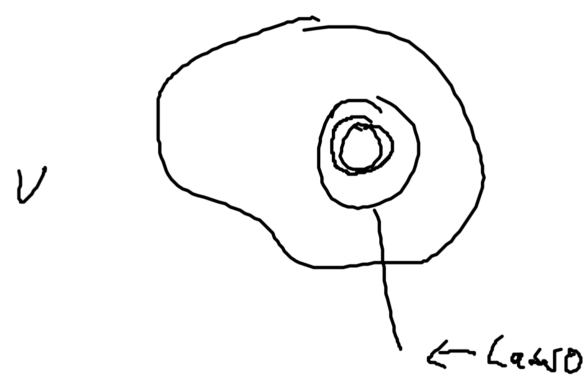
Parametrisierg.

$$\iint du\,dv\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \begin{pmatrix} \times \\ \cdot \end{pmatrix} \vec{v}(u,v)$$

Flächeninhalt über $|d\vec{A}|$

7. Skalar und Vektorpotential, Integralsätze

einfach zusammenhängend heißen Volumina im Raum, wenn jede geschlossene Kurve sich wie ein Lasso auf einen Punkt zusammenziehen läßt



wird ab jetzt vorausgesetzt

7.1. Darstellung spezieller Vektorfelder

a) wenn $\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) = 0 \xrightarrow{\text{so}} \vec{v}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$

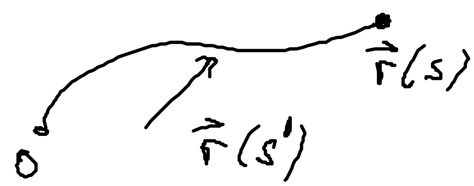
Ein rotationsfreies Feld kann als Gradientenfeld dargestellt werden

wenn: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot\ ) \equiv 0 \rightarrow \vec{V}(\vec{r}) \propto \vec{\nabla}\phi(\vec{r})$

Vorzeichen ist Konvention aus Mechanik:

$$\Big(E = T + U$$
$$\vec{F}_{mech} = \pm \vec{\nabla} U \Big)$$

Darstellung von $\phi(\vec{r})$:



berechnen einfach: $-\int_0^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{V}(\vec{r}\,') =$

$$\int_0^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla}'\phi(\vec{r}\,') = \int_0^s ds' \underbrace{\frac{d\vec{r}\,'(s)}{ds'} \cdot \vec{\nabla}'\phi(\vec{r}\,'(s'))}_{\text{Kettenregel}}$$

$$= \int_0^s ds' \frac{d\phi(\vec{r}(s'))}{ds'}$$

$$= \phi(\vec{r}) - \phi(0) \leftarrow \text{Konstante}$$

ϕ wird Potential von $\vec{V}$ genannt und läßt sich darstellen:

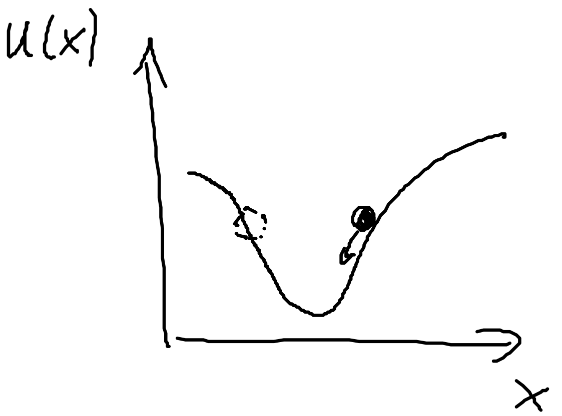
$$\phi(\vec{r}) = -\int_0^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot V(\vec{r}\,') + \text{Konstante}$$

Konstante gibt Eichfreiheit

„umeichen des Potentiale"

Felder bleiben unverändert $\vec{V} = -\vec{\nabla}\phi + \cancel{\vec{\nabla}\,\text{Konstante}}$

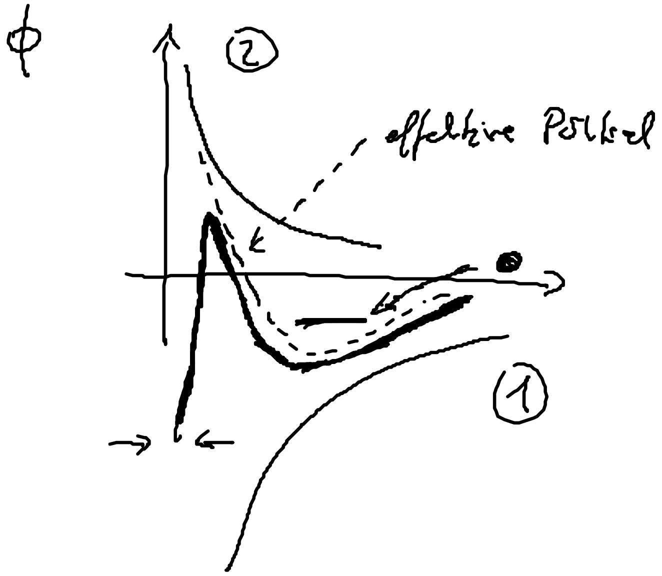
<u>Beispiel</u>: anschauliche Diskussion v. Bahnkurven



Abstand v. Stern

$\downarrow$

<u>Planetbewegg.</u>: „Ersatzpotential" $\phi(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$



Anziehg d. Stern nach Newton — 1

Drehimpulsbeitrg — 2

relativistisch Korrektur

$-\frac{\ell^2}{r^3}$ — 3

b) wenn $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{r}) = 0 \xrightarrow{\text{so}} \vec{v}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$

Ein divergenzfreies Feld kann als Wirbelfeld dargestellt werden

warum: $\vec{V} \propto \vec{\nabla}\times\vec{A}$ folgt aus $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\,\cdot\,) \equiv 0$

<u>Darstellg v.</u> $\vec{A}(\vec{r}) = \int_0^1 d\lambda\, \vec{v}(\lambda\vec{r})\times\vec{r}$

c) wenn $\vec{v}(\vec{r})$ im ∞ mindestens mit $\frac{1}{r^2}$ abfällt,

so ist $\vec{v}(\vec{r})$ allein durch seine Wirbel und Quelle,

dh. durch rot $\vec{v}(\vec{r})$ und div $\vec{v}(\vec{r})$ festgelegt!

wichtig in ED: hier sind Quellen u. Wirbel der Felder $\vec{E}, \vec{B}$ durch Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ und Stromdichte bestimmt $\vec{j}(\vec{r},t)$.

z.B. Elektrostatik
$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ damit } \vec{E} \text{ eindeutig festgelegt}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{grad} + \vec{V}_{wirbel}$$

Quelle

$$\vec{V}_{grad} = -\frac{1}{4\pi} \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Wirbel

$$\vec{V}_{wirbel} = \frac{1}{4\pi} \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \times \int d^3r' \frac{\vec{w}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \\ \vec{w} &= \vec{\nabla} \times \vec{V} \end{aligned}\right\} \text{ sei gegeben}$$

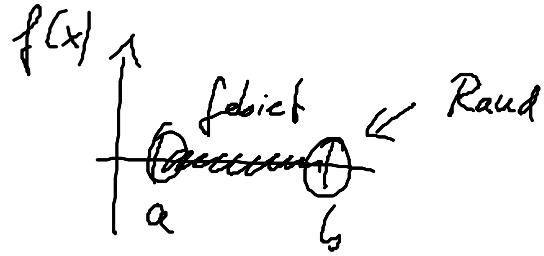
7.2. Integralsätze

Form v. Integralsätzen:

$\int$ über Ableitg. v. Funktion = Funktionswerte auf Rand d. Gebiets

Gebiet (V, A)

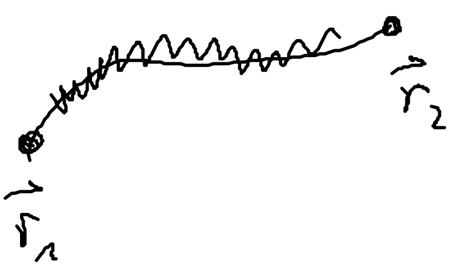
Bsp: $$\int_a^b dx\, \frac{dF}{dx} = F(b) - F(a)$$



$$f(x) = \frac{dF}{dx}$$

kann man das verallgemeinern?

a) Integralsatz f. Kurve



$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\vec r \cdot \vec V(\vec r) = \boxed{\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\vec r \cdot \vec\nabla \phi(\vec r) = \phi(\vec r_2) - \phi(\vec r_1)}$$

Rand

Integral über Kurve kann über Randpunkte ausgedrückt werden.

6) Integralsätze in 2d, 3d

(i) Satz v. Gauß

$$\int_V dV \, \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

∂V Oberfläche v. V

<u>Beispiel</u>: Elektrostatik $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

$$\int dV \longrightarrow \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

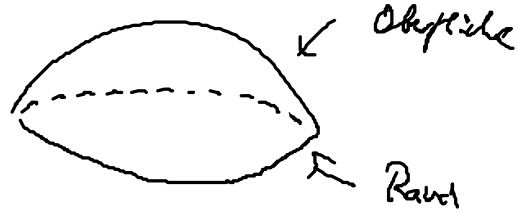
Ladungen sind Quelle des elektr. Felds

(ii) Satz v. Stokes

$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) = \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

A mit Rand

∂A (Kurve die OF abschließt)


Oberfläche
Rand