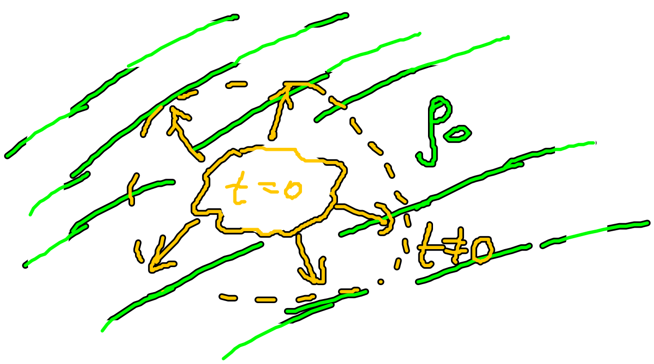
9. Wellen und Diffusion in Materie — die Ableitung partieller Differentialgleichungen

wie breitet sich Störung $\delta\rho(\vec{r},t)$ auf einer homogenen Massendichte ρ_0 aus?



2 Gleichungen vorweg nehmen:

a) Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\delta\rho(x,t) = 0$$

Geschwindigkeit

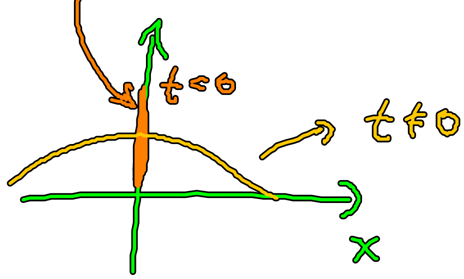
b) Diffusionsgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\right)\delta\rho(x,t) = 0$$

Diffusionskonstante

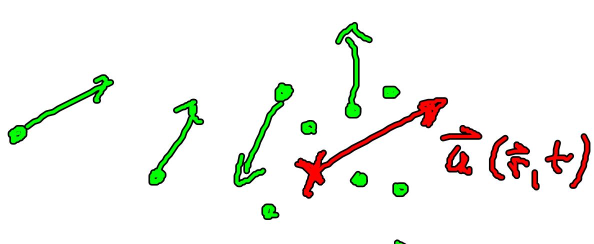
Diffusions und Wellengl. unterscheiden sich in Anzahl der Zeitableitungen → damit auch in Anzahl der AB:

$\delta\rho(x,t=0)$, $\delta\dot{\rho}(x,t=0)$



9.1. Die Bewegungsgleichungen f. ein Kontinuum

Bewegung v. Flüssigkeits / Gasmoleküle



n-te Teilchen : $\vec{r}_n(t)$

wollen nicht die Bahnkurven betrachten sondern

ein effektives Probeteilchen das in der Flüssigkeit „schwimmt“

dient zur Messung eines Geschwindigkeitsfelds $\underline{\vec{u}(\vec{r},t)}$

Def. Massendichte

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_k m_k \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t))$$

später Probeteilchen

Summe über Teilchen

$$\int d^3r \, \rho(\vec{r},t) = \int_V d^3r \, m_k \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) = \underline{\underline{m_k}}$$

um r_k herum

falls m_k in V

Def. Massenstromdichte

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sum_k \underbrace{m_k \dot{\vec{r}}_k(t)}_{} \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t))$$

auch Strom in Elektrodynamik

Ladung und Strom

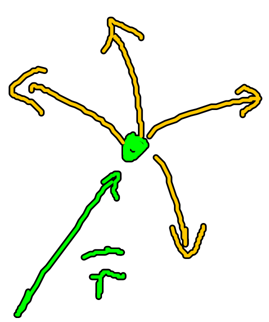
1\. wichtige partielle Dgl : Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho(\vec{r},t) = -\sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n \cdot \vec{\nabla}_r \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t))$$

$$= -\vec{\nabla}_r \cdot \underbrace{\sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n(t) \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t))}_{\vec{j}(\vec{r},t)}$$

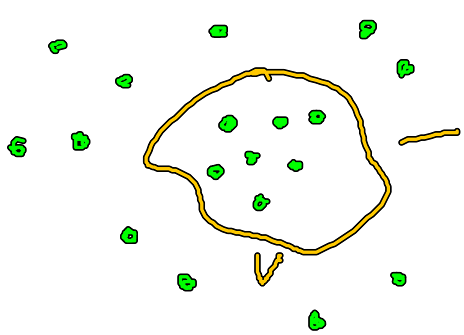
$$\partial_t \rho(\vec{r},t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r},t) = 0$$

partielle Dgl. mit Ort, und Zeit ableitg. gemischt



$\hat{=}$ Produktion v. Masse an Stelle $\vec{r}$ $\dot{\rho} \neq 0$

Wie kommt man zu Strömungsbetrachtg.?



mittele über Volumen am Punkt $\vec{r}$

$\hat{=}$ große Probeteilchen

Mittelungsfkt: $\frac{1}{V}\int d^3r'\, f(\vec r-\vec r')\, X(\vec r') = \langle X\rangle$

→ stellt Zahl der Teilch. in V fest

Mittlg.

- gilt mittel der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \langle \rho\rangle = -\vec\nabla\cdot\langle\vec j\rangle \qquad \text{Gleichg. f. } \rho$$

- <u>Ansatz:</u> $\langle\vec j\rangle = \vec u(\vec r,t)\langle\rho(\vec r,t)\rangle$

unbekannt, $\vec u$ muß ermittelt werden

auf 2 verschied. Arten $\partial_t \vec j$ berechnen, in Komponente, ab jetzt $\langle\rho\rangle$ $\langle j\rangle$ ohne $\langle\,\rangle$

(i) $\partial_t j_i = \partial_t(u_i\rho) = (\partial_t u_i)\rho + u_i\partial_t\rho$

$$= (\partial_t u_i)\rho - u_i\vec\nabla\cdot(\vec u\rho)$$

$$= (\partial_t u_i)\rho - u_i\partial_j(u_j\rho)$$

Def. Stromdichte

(ii) $\partial_t j_i = \partial_t\left\langle \sum_n m_n \dot r_{ni}(t)\,\delta(\vec r-\vec r_n(t))\right\rangle$

$\dot r_{ni}$:

$$= \Big\langle \sum_n \underbrace{m_n \ddot{r}_{n_i}}_{\text{Kraft auf Teilchen } F_{n_i}}(t)\, \delta(\vec r - \vec r_n(t)) \Big\rangle$$

i-te Komponente des n-ten Teilchens

$$- \Big\langle \sum_n m_n \dot r_{n_i}(t)\, \dot r_{n_j} \partial_j\, \delta(\vec r - \vec r_n(t)) \Big\rangle$$

⟵ Hierarchie problem → immer mehr Teilchen koppeln

$$= f_i$$

i-te Komponente der Kraftdichte $\frac{F}{V}$

$$- \Big\langle \sum_n m_n \dot r_{n_i}(t)\, \dot r_{n_j}\, \partial_j\, \delta(\vec r - \vec r_n(t)) \Big\rangle$$

$$\dot{\vec r}_n = \vec u(\vec r, t) + \delta \dot{\vec r}_n(t)$$

ohne WW führt das zum Ziel

$$\dot r_{n_i} \dot r_{n_j} = \underset{①}{u_i u_j} + \underset{②}{u_i\, \delta \dot r_{n_j}} + \underset{③}{u_j\, \delta \dot r_{n_i}} + \underset{④}{\delta \dot r_{n_i}\, \delta \dot r_{n_j}}$$

$$\partial_j \langle \quad \rangle = \partial_j (u_i u_j \rho) \quad ①$$

$+0$ (2+3) Mittlg. der Abweichung

$+ \partial_j p_{ij}$ (4)

Drucktensor

$$p_{ij} = \left\langle \sum_n m_n \, \delta\dot{r}_{n_i} \, \delta\dot{r}_{n_j} \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \right\rangle$$

muß plausibel gemacht werden

$$= 2 \left\langle \sum_n \frac{m_n}{2} \, \delta\dot{r}_{n_i} \, \delta\dot{r}_{n_j} \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \right\rangle$$

isotropes Gas: deswegen $\sim \delta_{ij}$

$$= 2 \left\langle \underbrace{\sum_n \frac{m_n}{2} \, \delta\dot{r}_{n_i} \, \delta\dot{r}_{n_i}}_{} \, \delta(\quad) \right\rangle \delta_{ij}$$

$$\frac{1}{3} \sum_n \sum_i \frac{\delta\dot{r}_{n_i}^2 \, m_n}{2} \rightarrow$$ ist kinetische E-Dichte

kompensiert sich

$$= \frac{2}{3} \underbrace{E_{kin}}_{} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{2}{3} \underbrace{\frac{3}{2} n k T}_{} = n k T = \boxed{\frac{N}{V} kT = p}$$

ideal

Teilchendichte $\frac{\rho}{m}$

ist also Druck vom ideal Gas

Aufsammeln aller Terme:

Flüssigkeitsmodell f. strömende Gase, Flüssigkeiten:

a) Kontinuität $\quad \partial_t \rho = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \rho)$

b) Navier-Stokes-Gleichung

$$\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \underbrace{- \gamma \vec{u}}_{}$$

Dämpfung phänomenologisch WW zwischen Teilchen $\vec{r}_n$ (Reibung)

für Strömungen: Probeteilchen $\vec{u}$ in Massenverteilung ρ

$$\vec{u}(\vec{r}, t), \quad \rho(\vec{r}, t)$$

in Medizin, Schiffe, Astrophysik

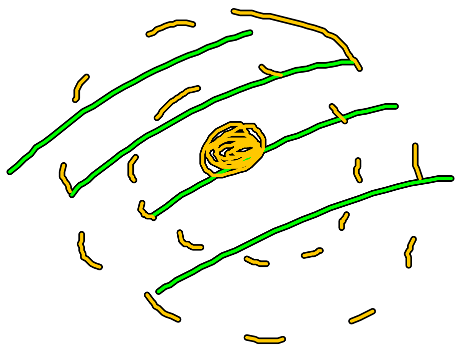
$\vec{f}$: externe Kraft, p - Druck

$$p = p(\rho, T)$$ an Thermodynamik

Gas

Temperatur

9.2. Ausbreitung kleiner Störungen: Wellen u. Diffusion



Ausbreitung einer Störung

Geschw. $\vec{u} = \vec{u}_0 + \delta \vec{u}$ = Hintergrund + kleine Änderung

Dichte $\rho = \rho_0 + \delta\rho$

Druck $p = p_0 + \delta p$

ruhendes Gas: $\vec{u}_0 = 0$

Fall vernachlässigbarer Reibg. $\mu \to 0$

a) $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \rho) = 0$ Produkt kleiner Größen $\to 0$

$$\partial_t(\rho_0 + \delta\rho) + \vec{\nabla}\cdot\left[(\cancel{\vec{u}_0} + \delta\vec{u})(\rho_0 + \delta\rho)\right] = 0$$

kein Funktion der Zeit

$$\partial_t \delta\rho + \vec{\nabla}\cdot(\delta u\, \rho_0) = 0$$

b) $$\partial_t \vec{u} + \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\,\vec{u}}_{\underbrace{\delta u\cdot\vec{\nabla}\,\delta u}_{\to 0}} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$$

Keine weiteren Kräfte $f_i = 0$

$$\partial\,\delta\vec{u} + 0 = -\frac{1}{\rho_0}\, 0\, \vec{\nabla}\,\delta p$$

$p = nkT$ ideales Gasgl.

$$\delta p = \frac{\delta\rho}{m} kT$$

$$\partial_t \delta\vec{u} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{kT}{m}\vec{\nabla}\,\delta\rho$$

(a+b) $\delta\vec{u}$ rauseliminieren

aus a) $$\partial_t^2 \delta\rho + \rho_0 \vec{\nabla}\cdot\partial_t \delta\vec{u} = 0$$

$$\partial_t^2 \delta\rho - \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{kT}{m}}_{\text{konst}} \vec{\nabla} \delta\rho = 0$$

$$\partial_t^2 \delta\rho - v^2 \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}} \delta\rho = 0$$

$$v^2 = \frac{kT}{m} \qquad \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_t \end{pmatrix} = \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right) \delta\rho = 0}$$

bei fehlender Reibg. → Wellenphänomene

v: Wellengeschwindigkeit

Schall!

Fall dominanter Reibung

a) $\partial_t \delta\rho + \vec{\nabla} \cdot (\delta u \rho_0) = 0$

b) $\cancel{\partial_t \delta\vec{u}} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{kT}{m}\vec{\nabla}\delta\rho \underline{\underline{- \gamma\,\delta\vec{u}}}$

$$\partial_t \delta\vec{u} \ll \gamma\,\delta\vec{u}$$

(a+b) $\partial_t \delta\rho - v^2\gamma^{-1}\Delta\,\delta\rho = 0$

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{D}\partial_t\right)\delta\rho = 0}$$

Diffusion tritt bei dominanter Reibg. auf.

9.3 Kurze Analyse zur Wellen- u. Diffusionsgl.

$(\partial_x^2 - v^{-2}\partial_t^2)\,\delta\rho = 0$ $\qquad$ $(\partial_x^2 - D^{-1}\partial_t)\,\delta\rho = 0$

Wellengl. $\qquad$ Diffusionsgl.

Ansatz mit ebener Welle: $A e^{ikx - i\omega t}$

Einsetzen: Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$

$$\underbrace{(-k^2 + v^{-2}\omega^2)A}_{} = 0 \qquad \underbrace{(-k^2 + iD^{-1}\omega)A}_{} = 0$$

$$\omega = \omega(k) = \pm vk \qquad \omega = \omega(k) = -iDk^2$$

lineare Dispersion $\qquad$ quadratische Dispersion

$\omega \sim k$ $\qquad$ $\omega \sim k^2$

(Spiel auf QM)

unterschiedliche Dispersion hat dramatische Konsequenzen f. Lösungen:

$$\delta\rho = A_\pm e^{i(kx \pm vkt)} \qquad \delta\rho = A e^{ikx - Dk^2 t}$$

$k(x \pm vt)$

beliebige Fkt.:

$f(x+vt)$, $g(x-vt)$

sind Lösungen der Wgl.

forminvariant!

aufgrund Dispersion $\nexists$ Forminvarianz

Lösungen durch Überlagerung der ebenen Wellen:

$$\delta\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, A(k)\, e^{ikx - i\omega(k)t}$$

Entwicklg. nach dem vollständig. System e^{ikx}

bei Wellen $\omega_\pm$ $\rightarrow$ $A_\pm$ sind zu überlagern

Frage: wie wird $A(k)$ bestimmt?

durch AB:

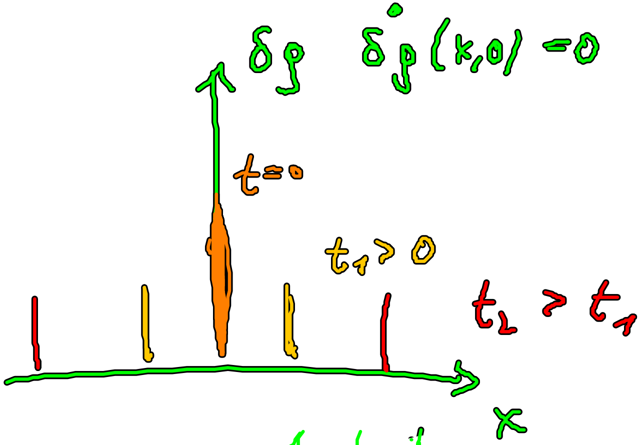
$$\delta\rho(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, A(k)\, e^{ikx}$$

$A(k)$ ist die Fouriertrafo der Anfangsverteilg.

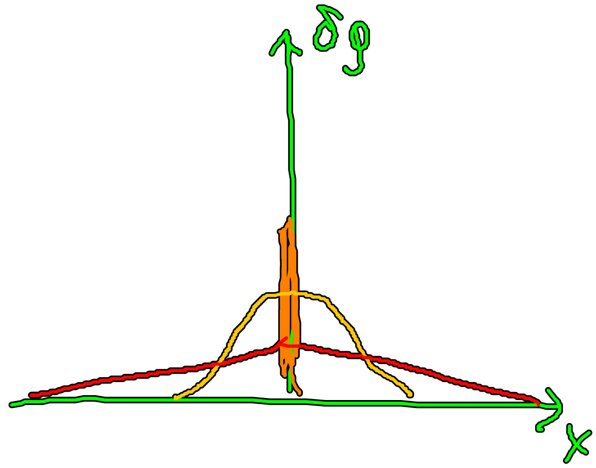
bei Wellen $A_\pm$ $\rightarrow$ $\delta\rho(x,0)$

$\delta\dot{\rho}(x,0)$

für dieselbe AB verschied. Lsg. der Gl.



Ausbreitung mit v



→ komplett verschiedene Verhalten