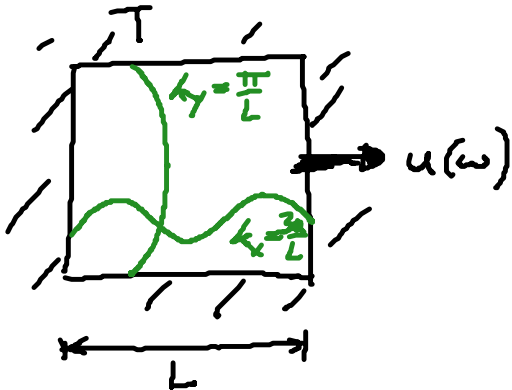


2.1 Licht als Teilchen

a) Hohlraumstrahlung:



stehende Lichtwellen

(1) Wellenvektor:

$$\underline{k} = \frac{\pi}{L} (n_x, n_y, n_z), \quad n_i = 1, 2, \dots$$

(2) Energie des Lichtfeldes in $[\omega, \omega + d\omega]$

$$u(\omega) L^3 d\omega$$

• Klass. Berechnung: $u(\omega) L^3 d\omega = N \times \text{mittlere Energie}$

$$(1) \quad N = \frac{L^3}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega \quad [\omega = ck]$$

(2) Gleichverteilungssatz der stat. Mechanik: (2.3)

Im thermischen Gleichgewicht besitzt jeder Thermodynam.

Freiheitsgrad eine mittlere Energie $\frac{k_B T}{2}$ [$k_B T$... thermische Energie]

$k_B = 1,3806 \times 10^{-23} \text{ J/K}$... Boltzmannsche Konstante

also: $u(\omega) L^3 d\omega = N \frac{k_B T}{2} \cdot 2$

↑ Lichtwelle: E & B-Feld

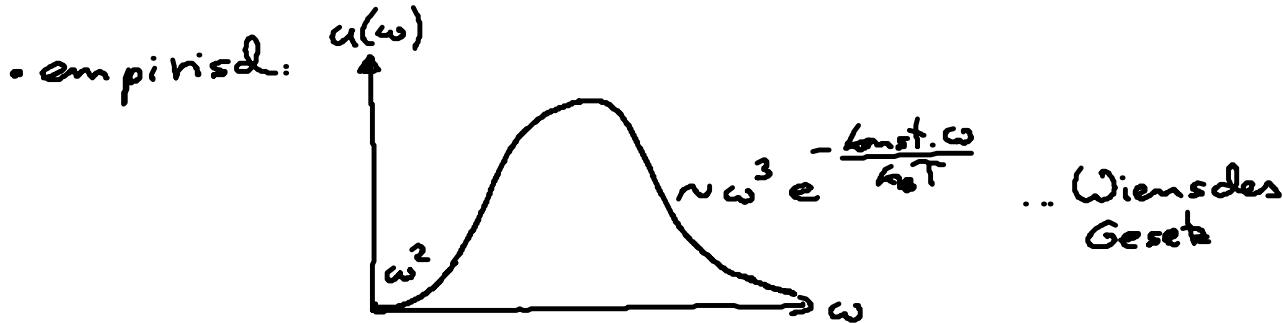
$$\longrightarrow \quad u(\omega) d\omega = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega \quad (2.4)$$

... Rayleigh-Jeans-Formel

$u(\omega) = u(\omega, c, T)$... durch generelle Überlegung der Thermodynamik / stat. Mechanik

Problem: „Ultraviolett katastrophe“: $u(\omega) \rightarrow \infty$ für $\omega \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\infty} u(\omega) d\omega = \infty \quad \leftarrow$$



• Planck: Anpassung durch Plancksche Strahlungsverteilung (1900):

$$u(\omega) = \frac{h}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{h\omega}{k_B T}} - 1} \quad (2.5)$$

mit

$$h = 6,61 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad \dots \text{ Plancksches Wirkungsquantum}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

dann: Ableitung von (2.5) durch Planck mit Quantenhypothese:

im Gegensatz zu klass. Vorstellung { Wandler = Oszillatoren diskreten Energieniveaus:

$$E_n = n h \omega = n h \nu \quad (2.6) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

→ Absorption/Emission von Strahlung in Quanten $h\omega$!!

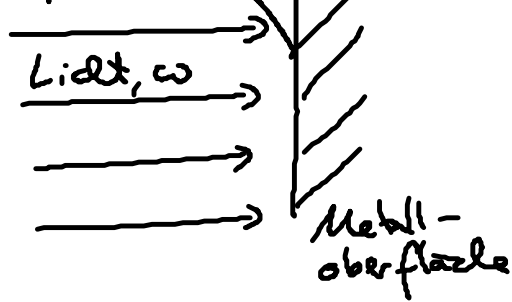
[$h\omega \gg k_B T$... Oszillatoren/Strahlung wird nicht therm. angeregt

→ keine UV-Katastrophe]

- Planck: ungewollter Initiator der QT
- „Geburtsstunde der QT“

b) Photoelektrischer Effekt:

- Experiment: e^- ; E_e



exp. Befund:

kinetische Energie des e^-

$$E_e = \frac{m_e v_e^2}{2} = h\omega - W \quad (2.7)$$

(0) h tritt auf!

(i) $E_e \sim \omega$

(ii) W ... Anrichtsarbeit

(iii) $\omega < \frac{W}{h} \rightarrow$ keine emittierte e^-

(iv) $E_e \neq f(\text{Intensität})$

• Deutung:

Einstein (1905): Licht besteht aus Photonen/Energiequanten

$$\left. \begin{array}{l} \text{Energie: } E = h\omega \\ \text{Impuls: } p = h\underline{k} \end{array} \right\} \underbrace{(E, p)}_{\text{Teilchen}} \longleftrightarrow \underbrace{(\omega, \underline{k})}_{\text{Welle}}$$

$\rightarrow e^-$ tritt aus, weil Photon beim Stoß Energie an e^- abgibt

• Motivation von $p = h\underline{k}$

Photonen. $v = c$, damit $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $p = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c$ nullid
(hoch relativ. Teilchen) $\rightarrow m = 0$

$$\xrightarrow{(1.3)} \underbrace{[E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}]}_{\rightarrow} \boxed{E = pc} \stackrel{!}{=} h\omega = h c k$$

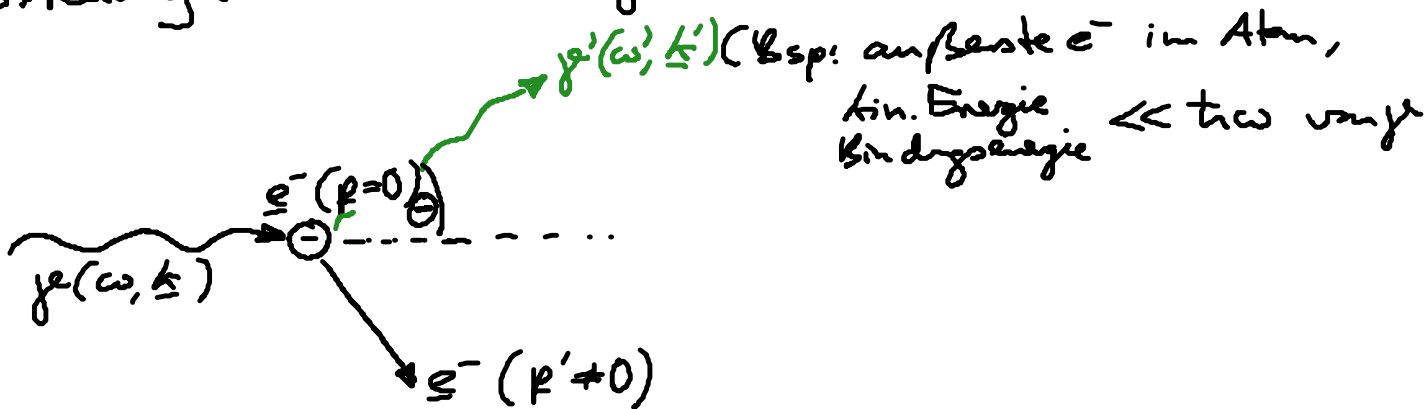
$$\rightarrow p = h k \xrightarrow{\text{simult. voll}} p \parallel \underline{k} \text{ ged.}$$

• Viererimpuls Photon:

$$p^\mu \text{ mit } \begin{pmatrix} E/c \\ p \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} k = \frac{\omega}{c} \\ \underline{k} \end{pmatrix} \quad (2.8b)$$

c) Compton-Effekt (1925):

Streuung von Röntgenstrahlen (γ) an „unladen e^- “



- klassisch: Licht regt e^- zum Schwingen an $\rightarrow \omega = \omega' \rightarrow \lambda = \lambda'$
- Experiment: $\omega' < \omega \rightarrow \lambda' > \lambda$

Deutung: Photon wird beim Stoß mit e^- gestreut, Abgabe von Energie an $e^- \rightarrow \hbar\omega' < \hbar\omega$

verwende:

Impulserhaltung
Energie (relativistisch)

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.8c)$$

mit $\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \dots$ Comptonwellenlänge der e^-

(2.8d)

... experimentell bestätigt!

(Herleitung: s. Übungen)

Zahlen: $\lambda_c(e^-) = 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ [$m_e = 0.91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$]

$\lambda(\gamma) \approx 10^{-10} \text{ m}$

$$\rightarrow \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \right)_{\max} = 2 \frac{\lambda_c}{\lambda} \approx 0.04!$$

(d) weitere klass. Wellen mit Teileneigenschaft:

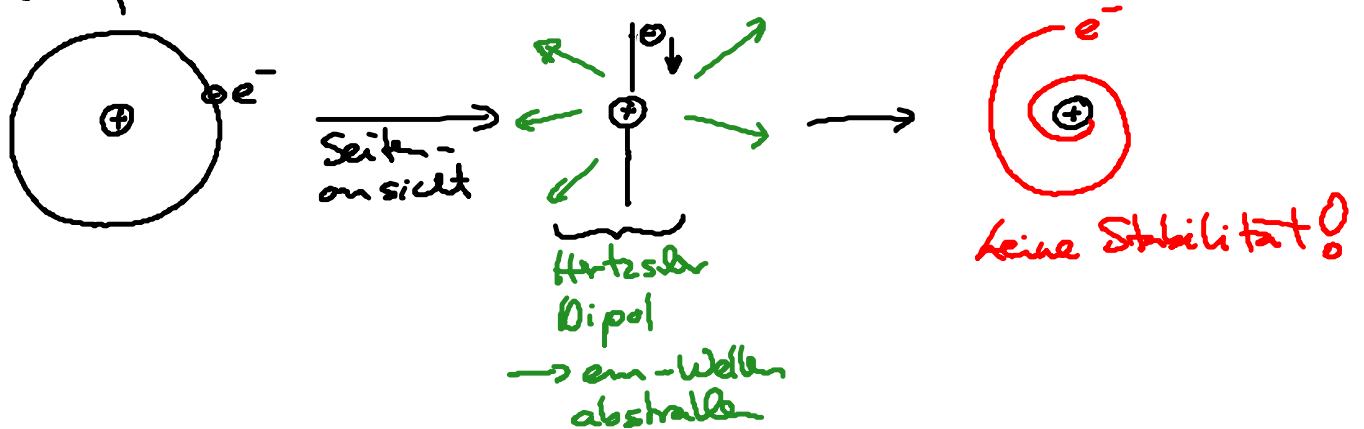
$$\text{Gitterschwingungen im Kristall } (\omega, \underline{k}) \longleftrightarrow \text{Phononen } E = \hbar\omega, \underline{p} = \hbar\underline{k} \quad (2.8e)$$

Anwendg: spezif. Wärme von Festkörpern

2.2 Klassische Teilchen als Welle

a) e^- im Atom \neq klass. Teilchen

- Rutherford'sche Atommodell (1911):



- Experiment: diskrete Emissions- & Absorptionslinien ω

Bsp: H-Atom: verallgemeinerte Balmer-Formel

$$h\omega = R_y \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (2.9)$$

$$n, m = 1, 2, \dots$$

$R_y = 13,55 \text{ eV}$... Rydberg-Konstante

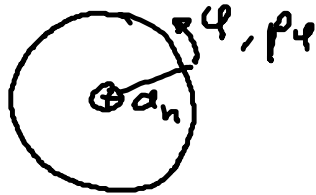
→ Bohrsches Atommodell (1913)

- (i) Bohrsche Quantisierungsbedingung:
 Nur diskrete Kreisbahnen, festgelegte
 durch diskrete Wirkung:

$$\oint p dq = nh, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10) \quad (2.11)$$
- (ii) Bahnen sind stabil
- (iii) Spektrum (2.9): $h\omega = E_m - E_n \dots$
 $E_m, E_n \dots$ diskrete Energieniveaus

Berechnung der diskreten Energieniveaus E_n aus (2.10)

Kreisbahn.



$$\left. \begin{array}{l} q = \varphi \\ p_\varphi = m_e a_n v_n \end{array} \right\} \xrightarrow{(2.10)} \oint p_\varphi d\varphi = 2\pi p_\varphi$$

Zentripetal = Coulombkraft

$$m_e a_n v_n = n \frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{m_e v_n^2}{a_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_n}$$

eliminiere v_n

$$\longrightarrow a_n = \frac{h^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} n^2 \quad (2.12)$$

$$a_1 = \frac{h^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} \approx 0,5 \text{ \AA} \dots \text{Bohrer Radius} \stackrel{!}{=} 1$$

Ansatz von H-Atom

$$\begin{aligned} E &= T + U \\ \text{mit } T &= \frac{m_e v_n^2}{2} \\ U &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n &= -R_y \frac{1}{n^2} \\ R_y &= \frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 h^2} = 13,60 \text{ eV} \end{aligned}$$

... diskrete Energieniveaus

$$(2.11)(iii) \longrightarrow (2.9) \infty$$