3.2 Wellenpakete

b) Fourier-Transformation

- Satz: Geg: stückweise, stetiges $f(x)$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)| < \infty$

  $\longrightarrow$ Fourier-Transformierte: $\bar{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x)\, e^{-ikx}$ (3.4)

  $\xrightarrow{\text{o.B.}}$ Fourier-Entwicklung: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \bar{f}(k)\, e^{ikx}$

- Parsevalsches Theorem:

  Geg: $f(x), g(x)$ und $\bar{f}(k), \bar{g}(k)$

  $\longrightarrow \int dx\, f^*(x) g(x) = \int dk\, \bar{f}^*(k) \bar{g}(k)$

Beweis: $\int dx\, f^*(x) g(x) \overset{(3.4)}{=} \iiint \underline{dx} \underline{\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}} \underline{\frac{dk'}{\sqrt{2\pi}}}\, \bar{f}^*(k') \bar{g}(k)\, \underbrace{e^{i(k-k')x}}_{= \delta(k-k')!}$

$$= \iint dk\, dk'\, \bar{f}^*(k') \bar{g}(k)\, \delta(k-k')$$

$$= \int dk\, \bar{f}^*(k) \bar{g}(k) \quad \text{qed}$$

- 3D: $f(\underline{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \bar{f}(\underline{k})\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$

  mit $\bar{f}(\underline{k}) = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^{3/2}} f(\underline{r})\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}}$

c) Wellenpakete: i.f. $\boxed{\underline{k} = \frac{\underline{p}}{\hbar}\,, \quad \omega = \frac{E}{\hbar}}$

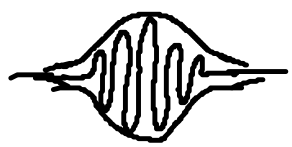
· Paket bei $t=0$:

$$\psi(\underline{r},0) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, \bar{\psi}(\underline{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}} \qquad (3.8)$$

$$\text{mit } \bar{\psi}(\underline{p}) = \int \frac{d^3r}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, \psi(\underline{r},0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$$

NB: $x, k_x, \ldots \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{\hbar}}, \frac{p_x}{\sqrt{\hbar}}$ etc.

· $\psi(\underline{r},0) \mathrel{\hat{=}}$



„lokalisiertes Teilchen"
$\mathrel{\hat{=}}$ Überlagerung ebener Wellen

· Zeitentwicklung: SG (3.1): Faktor: $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ [s. Lsg. Gl.(3.2)]

$$\psi(\underline{r},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, \bar{\psi}(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p}\cdot\underline{r} - Et)} \qquad (3.9)$$

$$\text{mit } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

· $\bar{\psi}(p)$ ... Amplitude einer Welle mit Impuls $\underline{p}$

$|\bar{\psi}(p)|^2\, d^3p$ .. Wahrscheinlichkeit, Teilchen mit Impuls $\underline{p}$ im Impulsvolumen d^3p vorzufinden (3.10)

Normierung: $\int d^3p\, |\bar{\psi}(p)|^2 = 1$ (3.11)

Beweis: (3.11): $\int d^3p\, |\bar{\psi}(p)|^2 = \int d^3p\, \bar{\psi}^*(\underline{p})\, \bar{\psi}(\underline{p}) \underset{\text{Parseval'sche Theorem}}{\overset{(3.6)}{=}} \int d^3r\, |\psi(r)|^2 = 1$

· Sprache: „$\bar{\psi}(\underline{p}) \mathrel{\hat{=}} \psi(\underline{r})$ projiziert auf Impulszustand $\underline{p}$"

„entspricht"

Wahrscheinlichkeiten $\xrightarrow[\text{Kap. 2.4}]{}$

d) Mittelwerte: „Was beobachtet man bei Mittelung über Ensemble vieler, gleicher Systeme / Teilchen?"

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet \text{ mittlerer Ort:} & \langle \underline{r} \rangle = \int d^3r \; \underline{r} \; |\psi(\underline{r},t)|^2 \\ \text{" Impuls:} & \langle \underline{p} \rangle = \int d^3p \; \underline{p} \; |\bar{\psi}(\underline{p},t)|^2 \end{array}}$$ (3.12) (3.13)

"Unschärfe" aus mittlerer quadratischen Abweichung: vgl. (2.29)

$$(\Delta \underline{r})^2 := \langle [\underline{r} - \langle \underline{r} \rangle]^2 \rangle = \langle \underline{r}^2 \rangle - \langle \underline{r} \rangle^2 \qquad (3.14)$$

$$(\Delta \underline{p})^2 := \langle [\underline{p} - \langle \underline{p} \rangle]^2 \rangle = \langle \underline{p}^2 \rangle - \langle \underline{p} \rangle^2 \qquad (3.15)$$

• pathologisches Bsp:

$$\text{(i)} \quad \psi(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \, e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p}_0 \cdot \underline{r} - Et)} \qquad (3.16)$$

$$\left.\begin{array}{l} \longrightarrow \quad \langle \underline{r} \rangle = \int\limits_{\text{"}-\infty\text{"}}^{\text{"}\infty\text{"}} \frac{d^3r}{(2\pi\hbar)^3} \, \underline{r} \quad \text{"} = 0 \text{"} \\ (\Delta \underline{r})^2 = \int \frac{d^3r}{(2\pi\hbar)^3} \, \underline{r}^2 \quad \text{"} = \infty \text{"} \end{array}\right\} \qquad (3.17)$$

ψ nicht normierbar!

$\hat{=}$ Teilchen ist überall!

$$\text{(ii)} \quad \bar{\psi}(\underline{p},t) \overset{(3.8)}{=} \int \frac{d^3r}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \, \psi(\underline{r},t) \, e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$$

$$= \int \frac{d^3r}{(2\pi\hbar)^3} \, e^{\frac{i}{\hbar}\underbrace{(\underline{p}_0 - \underline{p})\cdot\underline{r}}_{(\ldots)_x x + (\ldots)_y y + (\ldots)_z z}} \, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

mit $\frac{1}{2\pi}\int d\frac{x}{\hbar}\, e^{i(p_{0x}-p_x)\frac{x}{\hbar}} = \delta(p_{0x}-p_x)$!

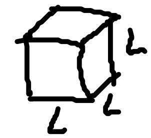
$$= \delta(p_{0x}-p_x)\,\delta(p_{0y}-p_y)\,\delta(p_{0z}-p_z)\,e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

$$\longrightarrow \Psi(\underline{p},t) = \delta(\underline{p}_0-\underline{p})\,e^{-i/\hbar\, Et} \qquad (3.18)$$

≙ Teilchen mit scharfem Impuls p_0!

Achtung: $\langle \underline{p}\rangle$, $(\Delta \underline{p})^2$ existieren nicht!

• <u>Bsp II</u>: „freies Teilchen" im Volumen $V = L\times L\times L$



& periodische Randbedingungen

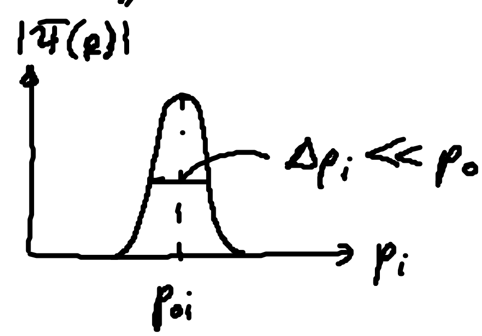
$$\longrightarrow \psi(\underline{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p}_0\cdot\underline{r} - Et)} \quad (3.19), \quad \underbrace{p_{0i} = \hbar\frac{2\pi}{L}n_i}_{\text{nur diskrete } \underline{p}\,!!}, \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \quad i = x,y,z$$

$$\longrightarrow \left.\begin{aligned} \langle \underline{r}\rangle &= 0 \\ (\Delta \underline{r})^2 &= \left(\frac{L}{2}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (3.20)$$

s. Übungen

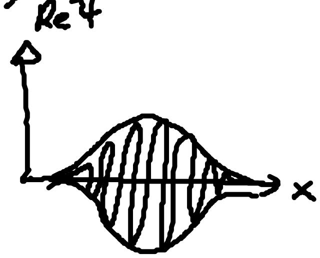
e) <u>Gruppengeschwindigkeit</u> $\underline{v}_{gr}$: „Geschw. eines Wellenpaketes"

• Sei $\Psi(\underline{p}) = |\Psi(\underline{p})|\, e^{i\alpha(\underline{p})}$



$i = x,y,z$

$$\longrightarrow \Psi(\underline{r},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, |\bar{\Psi}(p)|\, e^{i/\hbar\,(\underline{p}\cdot\underline{r} - Et + \hbar\alpha)}$$



(i) „fast alle" $\underline{r}$: starke Oszillationen des Integr.

$e^{\cdots}$ bei Variation von $p \longrightarrow \Psi(\underline{r},t) = 0$

(ii) $\Psi(\underline{r},t)$ maximal am $\underline{r} = \underline{r}_m$, wenn alle Partialwellen $e^{\cdots}$ gleiche Phase haben, bei Variation von p

($\rightarrow$ konstruktive Interferenz)

≙ Methode der stationären Phase:

$$\boxed{\nabla_p\,(\underline{p}\cdot\underline{r} - Et + \hbar\alpha)\Big|_{p_0} = 0} \qquad (3.21)$$

$\longrightarrow$ Maximum / Zentrum von $\Psi(\underline{r},t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{r}_m &= \underline{v}_{gr}\, t + \underline{r}_0 \\ &\text{mit } \underline{r}_0 = -\hbar \nabla_p \alpha(p)\big|_{p_0} \end{aligned}} \qquad (3.22)$$

$$\boxed{\underline{v}_{gr} = \nabla_p E(p)\Big|_{p_0} = \nabla_{\underline{k}}\, \omega(\underline{k})\Big|_{p_0 = \hbar \underline{k}}}$$

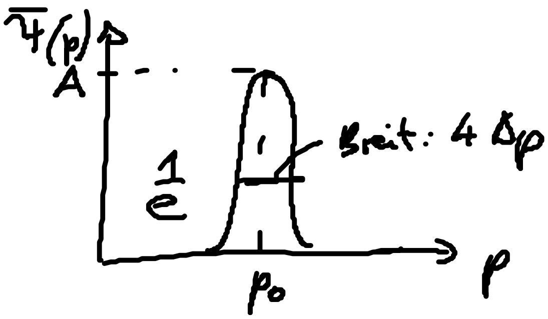
Deutung: $\underline{r}_m(t) \approx \langle \underline{r} \rangle (t)$ … „Ort des klass. Teilchens"

$\underline{v}_{gr} = \nabla_k\, \omega(\underline{k})\Big|_{\underline{k}_0} \approx \frac{\hbar \underline{k}_0}{m} = \frac{p_0}{m} \approx \frac{\langle p \rangle}{m}$ … „Geschw. des klass. Teilchens"

f) Gaußsches Wellenpaket (1dim): wichtig! zur Illustration

• **Def:**

$$\boxed{\psi(x,t) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, \tilde{\psi}(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}\,, \quad E = \frac{p^2}{2m} \qquad \text{mit } \tilde{\psi}(p) = \underbrace{A\, e^{-(p-p_0)^2/[4(\Delta p)^2]}}_{\text{Gauß-Verteilung}}\,, \quad \underbrace{A = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi \Delta p^2}}}_{\text{aus Normierung: } \int |\tilde{\psi}(p)|^2 dp = 1}} \tag{3.24}$$



• hier: Diskussion
  Übungen: Beweise

• Impuls: Mittelwerte: $\langle p \rangle \overset{(3.13)}{=} p_0$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Mittelwerte: } \langle p \rangle \overset{(3.13)}{=} p_0 \\ &\text{Unschärfe: } [\langle (p-p_0)^2 \rangle]^{1/2} \underset{(3.15)}{=} \Delta p \end{aligned}\right\} \quad (3.25)$$

• Ausführung FT in (3.24) $\longrightarrow \psi(x,t)$ (komplexe Gauß-Fkt)
  $\mathrm{Re}\,\psi$, $\mathrm{Im}\,\psi$