8.2 Allgemeine Betrachtungen

b) <u>Parität</u>:

- $P f(x) = f(-x)$, $P U(x) = U(x)$

$\longrightarrow$ $\varphi(x), \varphi(-x)$ EV von $\hat{H}$

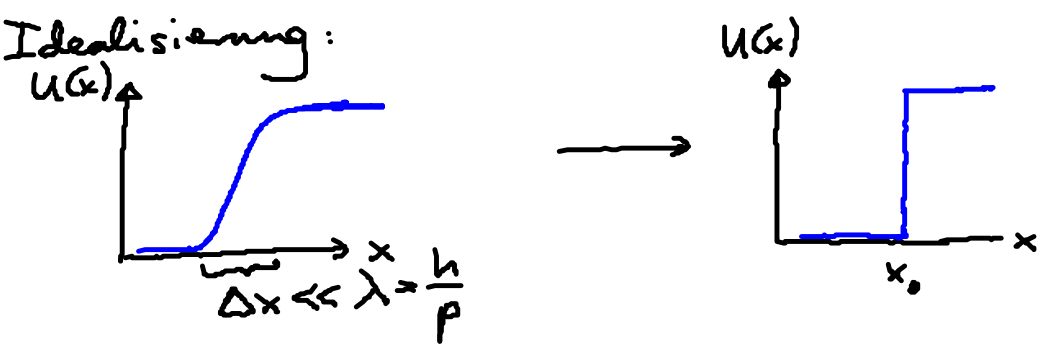
(ii) ungebundene Zustände:

zweifache Entartung $\hat{=}\ \varphi(x), \varphi(-x)$ $\longrightarrow$ gerade Parität: $\varphi(x)+\varphi(-x)$

ungerade " : $\varphi(x)-\varphi(-x)$

c) <u>Anschlussbedingungen für unstetiges $U(x)$</u>:

- Idealisierung:



- Vorteil: Bereiche mit konstantem U,

$$\text{SG:} \quad \varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\varphi = 0 \qquad (8.9)$$

Lösung: (i) <u>$E>U$</u>: $\quad E-U = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad k>0$

$$\longrightarrow \varphi(x) = A e^{ikx} + A' e^{-ikx} \quad (\text{Streuzustände})$$

$$= A'' \sin kx + A''' \cos kx \quad (\text{gebundene Zustände})$$

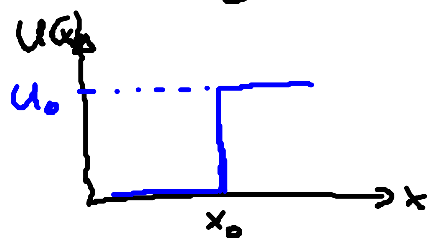
(ii) <u>$E<U$</u>: klassisch nicht erlaubt

$$E-U = -\frac{\hbar^2 \varkappa^2}{2m}, \quad \varkappa>0$$

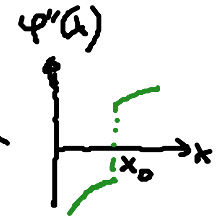
$$\longrightarrow \varphi(x) = B e^{\varkappa x} + B' e^{-\varkappa x}$$

Bestimme $A, A', B, B', \ldots$ aus Anschlußbedingungen!

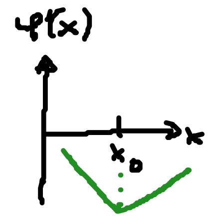
· Anschlußbedingungen:

1. 

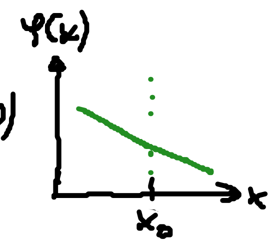
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[U(x_0+\varepsilon)-U(x_0-\varepsilon)\right] = U_0 < \infty$$



$\varphi(x)$ endlich $\xrightarrow{(8.9)}$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\varphi''(x_0+\varepsilon)-\varphi''(x-\varepsilon)\right]$ = endlich

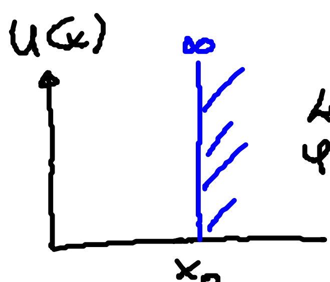


$$\left.\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}(8.9)\,dx\right\} \longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varphi'(x_0+\varepsilon)-\varphi'(x_0-\varepsilon)\right]=0$$



$\longrightarrow$ $\varphi'(x)\big|_{x_0}$ stetig

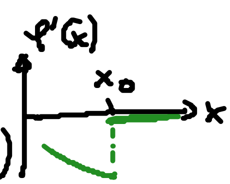
$\longrightarrow$ $\varphi(x)\big|_{x_0}$ stetig & glatt (8.10)

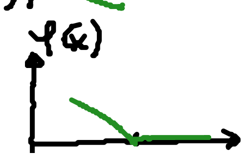
2. 

kein Teilchen
$\varphi(x)=0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[U(x_0+\varepsilon)-\underbrace{U(x_0-\varepsilon)}_{=0}\Big] \text{ „}=\infty\text{"}$$

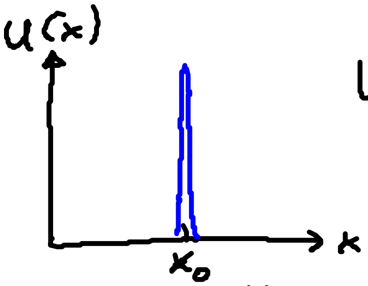
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}(8.9)\,dx \longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varphi'(x_0+\varepsilon)-\varphi'(x_0-\varepsilon)\right] = \text{endlich}$$

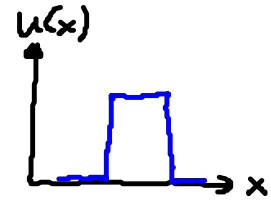




$\longrightarrow$ $\varphi'(x)\big|_{x_0}$ unstetig

$\longrightarrow$ $\varphi(x)\big|_{x_0}=0$ & stetig (8.11)

3. 

$U(x) = U_0\,\delta(x-x_0)$ [Grenzfall von 

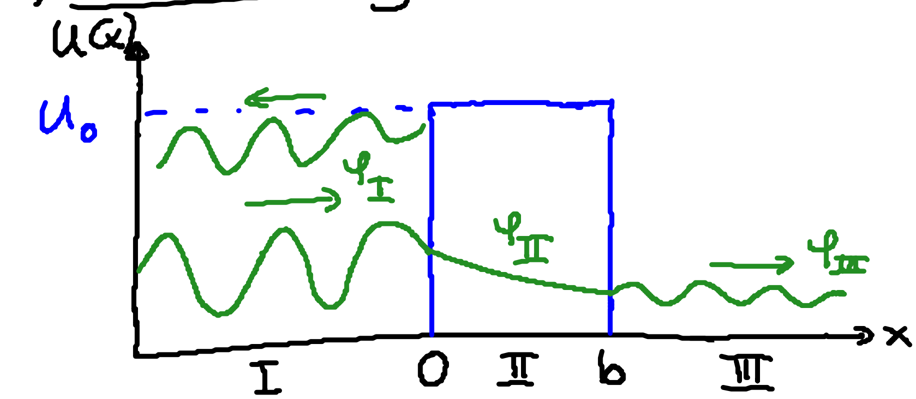
]

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} (8.3)\,dx \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\varphi'(x_0+\varepsilon)-\varphi'(x_0-\varepsilon)\right] = \frac{2m}{\hbar^2}U_0\,\varphi(x)\Big|_{x_0} \\ \longrightarrow \varphi'(x)\Big|_{x_0} \text{ unstetig} \qquad (8.12) \\ \longrightarrow \varphi(x)\Big|_{x_0} \text{ stetig} \end{array}}$$

8.3 Potentialschwelle – Tunneleffekt

a) Problemstellung



- Löse: $\hat{H}\varphi = E\varphi$

$\longrightarrow$ Ergebnis: Kontinuum von Zuständen (unendliches System)

$E < U_0$: φ_I, $\underbrace{\varphi_{II}\neq 0,\ \varphi_{III}\neq 0}_{}$

Tunneleffekt = QT-Resultat

klassik. Teilchen kann Pot. barriere nicht „überwinden" wegen $E<U_0$

$E > U_0$: Transmission & Reflexion ($\neq$ Klassik)

Resonanzen

· Realität: „Bastle" Wellenpakete aus Eigenzuständen

b) Tunneleffekt:

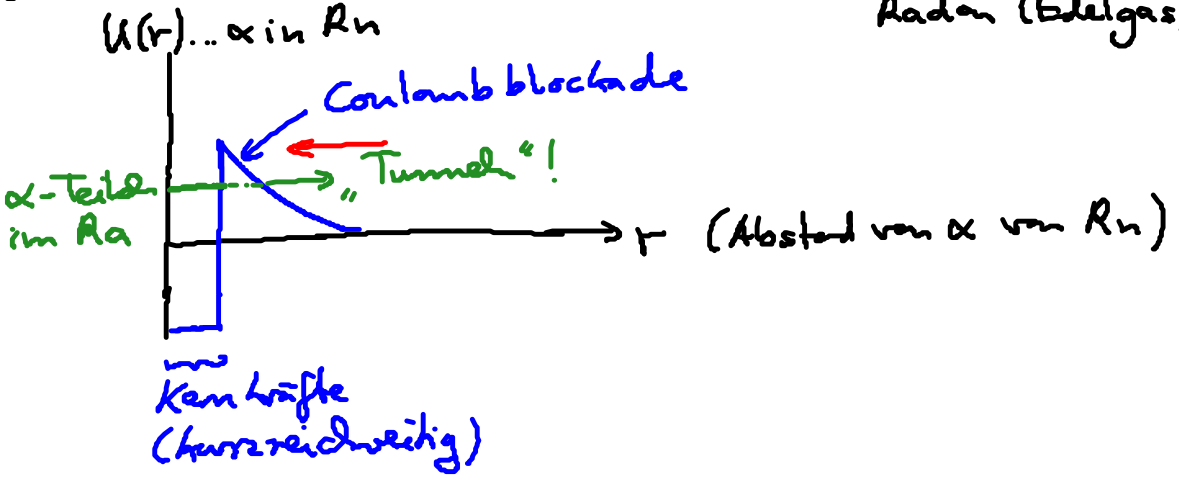
Kernladungszahl

Radium (Erdalkalimetall)

(i) α-Zerfall:

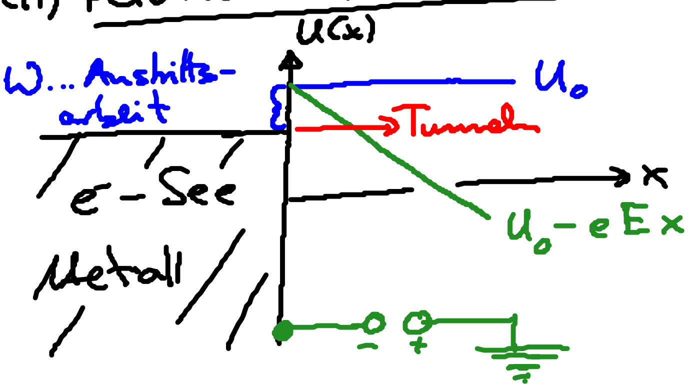
Bsp. $^{88}Ra \longrightarrow {}^{86}Rn + \alpha$, $\alpha = n^2p^2$ ... Heliumkern

Radon (Edelgas)

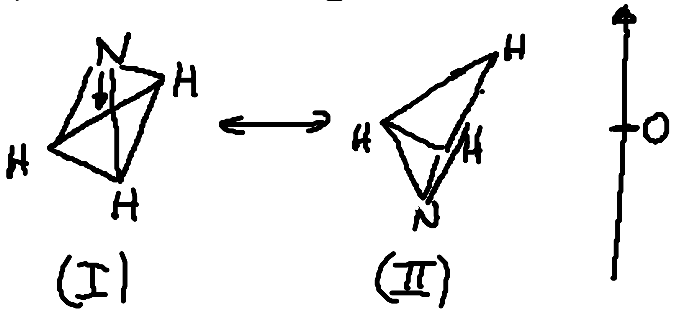


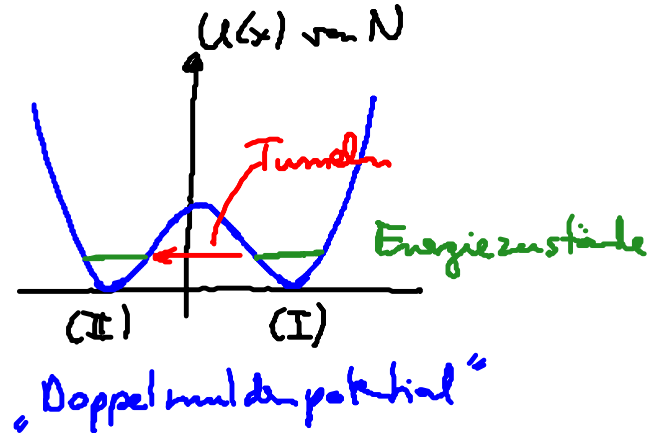
Umkehrung: Vereinigung gleich geladener Kerne (Bsp. Kernfusion)

(ii) Feldemission von e^- in Metallen:

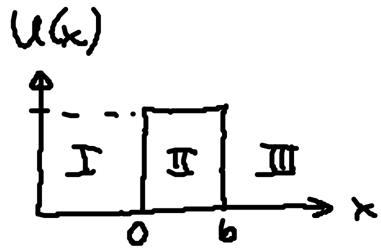


(iii) Molekülschwingung: NH_3





c) Rechnung: für U_0



- EW-Glg. (8.2/8.9): $\varphi''(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(U-E)\varphi(x) = 0$

(8.13) Bereich I und III $(U=0)$: $\varphi'' + k^2\varphi = 0$, $\boxed{k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}}$

Bereich II $(U_0 \neq 0)$: $\varphi'' - \varkappa^2\varphi = 0$, $\boxed{\varkappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E) = \begin{cases} >0, & E < U_0 \\ <0, & E > U_0 \end{cases}}$

$\longrightarrow$ $\boxed{\eta = \frac{\varkappa}{k}}$ (8.14)

- Lösung:

(I) $(-\infty < x < 0)$: $\varphi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$

(II) $(0 < x < b)$: $\varphi_{II}(x) = A_2 e^{-\varkappa x} + B_2 e^{\varkappa x}$ $[\varkappa > 0,\ E < U_0$; $\varkappa = iK,\ E > U_0]$

(III) $(b < x < \infty)$: $\varphi_{III}(x) = A_3 e^{ikx} + \cancel{B_3 e^{-ikx}}$

Exp: einlaufende Welle von $-\infty$: A_1

reflekt. Welle nach $-\infty$: B_1

transm. Welle nach ∞: A_3

· Bestimmung der A_i, B_i:

Anschlußbed. (8.10):

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_{I}(0) = \varphi_{II}(0), & \varphi_{I}'(0) = \varphi_{II}'(0) \\ \varphi_{II}(b) = \varphi_{III}(b), & \varphi_{II}'(b) = \varphi_{III}'(b) \end{array}\right\} \quad (8.16)$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{4 lineare Gln. für } A_1, B_1, A_2, B_2, A_3}$

$$\left.\begin{array}{rll} A_1 + B_1 & = A_2 + B_2 & (a) \\ ik A_1 - ik B_1 & = -\varkappa A_2 + \varkappa B_2 & (b) \\ A_3 e^{ikb} & = A_2 e^{-\varkappa b} + B_2 e^{\varkappa b} & (c) \\ ik A_3 e^{ikb} & = -\varkappa A_2 e^{-\varkappa b} + \varkappa B_2 e^{\varkappa b} & (d) \end{array}\right\} (8.17)$$

__Exp:__ $|A_1|^2$... frei wählbar, Intensität!

für Rechnung: A_3

(8.17) (c,d) $\longrightarrow$ $A_2(A_3)$, $B_2(A_3)$

$\longrightarrow$ (8.17)(a,b) $\longrightarrow$ $A_1(A_3)$, $B_1(A_3)$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 &= e^{ikb}\left[\cosh(\varkappa b) + \frac{i}{2}\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)\sinh(\varkappa b)\right] A_3 \\ B_1 &= -\frac{i}{2} e^{ikb}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right)\sinh(\varkappa b) A_3 \\ A_2 &= \frac{1}{2} e^{ikb} e^{\varkappa b}\left(1 - \frac{i}{\eta}\right) A_3 \\ B_2 &= \frac{1}{2} e^{ikb} e^{-\varkappa b}\left(1 + \frac{i}{\eta}\right) A_3 \end{aligned}} \quad (8.18)$$

d) <u>Diskussion:</u>

Transmissionskoeffizienten:

$$T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \cosh^2 = 1+\sinh^2}}{\overset{(8.18)}{=}} \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left|\eta + \frac{1}{\eta}\right|^2 \left|\sinh(\kappa b)\right|^2} \leq 1 \qquad (8.19)$$

Reflexionskoeffizient:

$$R = \left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2 \underset{(8.18)}{=} 1 - T$$ ... Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit

• Tunneleffekt: $T \neq 0$ für $E < U_0$, $\kappa \underset{(8.13)}{=} \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}$

für $\kappa b \gg 1$: sehr hohe und breite Schwelle

$$(8.19) \xrightarrow[\sinh x \approx \frac{1}{2}e^x]{} \boxed{T \approx \left(\frac{4\eta}{\eta^2+1}\right)^2 e^{-2\kappa b}}$$