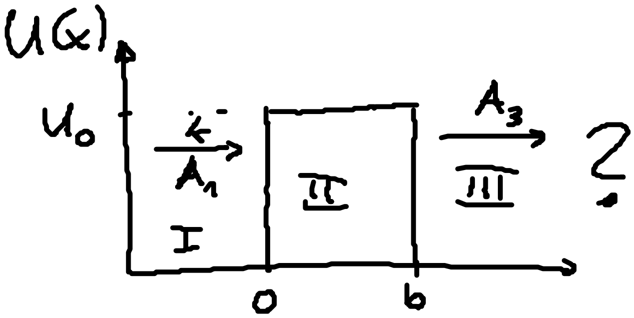
8.3 Potentialschwelle – Tunneleffekt



$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\varkappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E) = \begin{cases} >0, & E < U_0 \ldots \text{Tunneln} \\ <0, & E > U_0 \end{cases}$$

$$\boxed{T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2}$$

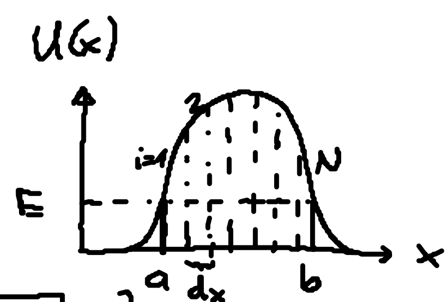
$$\eta = \frac{\varkappa}{k}$$

$$\varkappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}$$

· Tunneleffekt: $E < U_0$

$\varkappa b \gg 1$: $$\boxed{T \approx \left(\frac{4\eta}{(\eta^2+1)}\right)^2 e^{-2\varkappa b}} \qquad (8.20)$$

Bem: kont. Potentialschwelle



o.B.:

$$T = \prod_{i=1}^{N} \exp\Big\{-\underbrace{\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m[U(x_i)-E]}}_{2\varkappa}\, dx\Big\}$$

$$= \exp\Big\{-\frac{2}{\hbar}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{2m[U(x_i)-E]}\, dx\Big\}$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \boxed{T = \exp\Big\{-\frac{2}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2m[U(x)-E]}\, dx\Big\}} \qquad (8.21)$$

• „Streuung": $E > U_0$, $\varkappa = iK = \frac{i}{\hbar}\sqrt{2m(E-U_0)}$

$$= \frac{i}{\hbar}\sqrt{2mU_0}\sqrt{\frac{E}{U_0}-1}$$

$$\eta = \frac{\varkappa}{k} = i\frac{K}{k} = i\Lambda = i\sqrt{1-\frac{U_0}{E}}$$

$\xrightarrow[(8.19)]{\sinh(ix) = i\sin x}$

$$\boxed{T = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\Lambda - \frac{1}{\Lambda}\right)^2 \sin^2 Kb}} \quad (8.22)$$

$T = T\left(\frac{E}{U_0}\right)$ ... Teilchen „spürt" die Schwelle

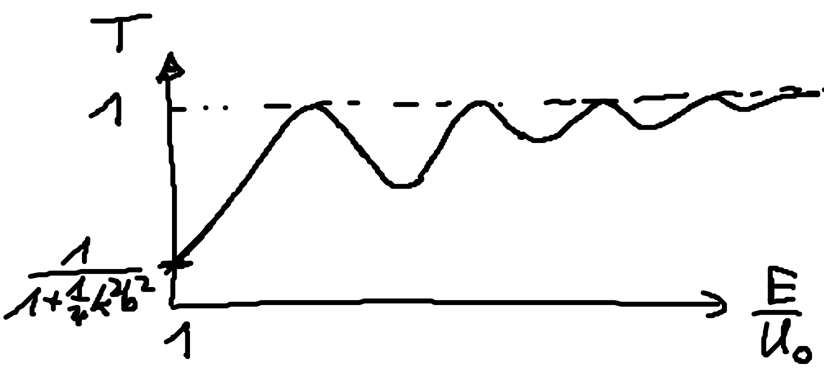
(i) „Resonanzen": $T = 1$ für $Kb = n\pi \longrightarrow \left(\frac{E}{U_0}\right)_n$, $n = 1, 2, \ldots$

(ii) Minimum von T: für $Kb \approx (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, \ldots$

(iii) $T\left(\frac{E}{U_0} \to 1\right)$: $\sin^2(Kb) \underset{K\to 0}{\approx} K^2 b^2$

$$\longrightarrow T \approx \frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{K}{k}-\frac{k}{K}\right)^2 K^2 b^2}$$

$$\longrightarrow T(E = U_0) \overset{K=0}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{4}k^2 b^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{mU_0}{\hbar^2}b^2} \quad (8.23)$$



8.4 Harmonischer Oszillator

• Motivation: Klass. Mechanik

... 1D harm. Oszillator (ausführlich)

harm. gekoppelte Massepkte

$\longrightarrow$ entkoppelte Oszillatoren (Eigenschw.)

z.B. Molekülschwingungen
Gitterschwingungen $\longrightarrow$ QT: Phononen

- hier: QT-Behandlg

a) Problemstellung:

- EW-Problem: $\hat{H}\psi = E\psi$, $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x)$ (8.24)

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2, \quad \omega_0^2 = \frac{f}{m}$$

... Hamiltonoperator des harm. Oszillators

- Skalierung:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{typische Länge: } \xi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} & \text{dimensionslose Ort koord. } \xi = \frac{x}{\xi_0} \\ \text{" Energie: } \hbar\omega_0 & \text{Energie: } \varepsilon = E/\hbar\omega_0 \end{array}} \quad (8.25)$$

damit (8.24) $\longrightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\right]\varphi(\xi) = \varepsilon\,\varphi(\xi)} \quad (8.26)$$

... EW-Problem <u>ohne</u> störende Parameter

NB: nur gebundene Zustände
$\longrightarrow$ diskretes Spektrum nicht entarteter EW

- Lsg. der Vgl. (8.26): Sommerfeldsche Polynommethode
$\longrightarrow$ Hermitesche Polynome

<u>hier:</u>

b) <u>Algebraische Lsg.</u>:

- Führe ein:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{"Vernichtungsoperator"} & a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi} + \xi\right) \\ \text{"Erzeugungsoperator"} & a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{d\xi} + \xi\right) \end{array}} \quad (8.27)$$

adjungierter Operator: $\frac{d}{d\xi} \to -\frac{d}{d\xi}$

$$\xrightarrow{(8.26)} \boxed{\left(a^+a + \tfrac{1}{2}\right)\varphi = \varepsilon\varphi} \quad (8.28)$$

Beweis: $a^+a\,\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\left(-\frac{d}{d\xi} + \xi\right)\left(\frac{d}{d\xi} + \xi\right)\varphi(\xi)$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} - \cancel{\xi\frac{d}{d\xi}} - 1 + \cancel{\xi\frac{d}{d\xi}} + \xi^2\right)\varphi(\xi)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 - 1\right)\varphi(\xi) \quad (8.29)$$

- Löse EW-Problem von: (8.30)

$$\boxed{\text{„Besetzungszahloperator"} \quad \hat{n} = a^+a: \quad \hat{n}\varphi_\nu = \nu\varphi_\nu \longrightarrow \varepsilon = \nu + \tfrac{1}{2}}$$

- algebraische Struktur:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(i)} & [a, a^+] = 1 \\ \text{(ii)} & [\hat{n}, a^+] = a^+ \\ \text{(iii)} & [\hat{n}, \hat{a}] = -a \end{array}} \quad (8.31)$$

zu (ii) $[a^+a, a^+] = a^+\underbrace{[a, a^+]}_{1} = a^+$

- Eigenfunktion $\varphi_0 \overset{?}{\underset{-}{\ldots}}$ Grundzustand

Berechne: $\nu \overbrace{\langle\varphi_\nu|\varphi_\nu\rangle}^{\geq 0} = \langle\varphi_\nu|a^+a\,\varphi_\nu\rangle = \langle a\varphi_\nu|a\varphi_\nu\rangle \geq 0$

$\longrightarrow \quad \nu \geq 0 \longrightarrow$ niedrigst möglicher EW: $\boxed{\nu = 0 \text{ mit } a\varphi_0 = 0 \text{ und } \langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1}$

NB: weitere Argumentation klärt $\nu = 0$ ist EW!! (8.32)

- Beh.: $\boxed{\hat{n}\varphi_\nu = \nu\varphi_\nu \longrightarrow \varphi_{\nu+1} = \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}\,a^+\varphi_\nu \quad \text{mit } \hat{n}\varphi_{\nu+1} = (\nu+1)\varphi_{\nu+1} \quad \ldots a^+ \text{ erzeugt neue Eigenfktn.}}$

Beweis: $\hat{n}\, a^+\varphi_\nu \underset{(8.31)(ii)}{=} (a^+\hat{n} + a^+)\varphi_\nu = (\nu+1)a^+\varphi_\nu$ qed

Normierung: $\langle a^+\varphi_\nu | a^+\varphi_\nu\rangle = \langle \varphi_\nu | a a^+ \varphi_\nu\rangle =$

$$\underset{(8.31)(i)}{=} \langle \varphi_\nu | a^+a + 1 | \varphi_\nu\rangle = (\nu+1)\underbrace{\langle\varphi_\nu|\varphi_\nu\rangle}_{=1}$$

$$= \nu + 1 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\nu+1}} \text{ qed}$$

• also: Lsg. von EW-Problem (8.30):

$$\boxed{\hat{n}\varphi_n = n\varphi_n \ , \quad \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n\varphi_0 \quad , n = 0,1,2,\ldots} \quad (8.34)$$

$n \ldots$ „Besetzungszahl" des harm. Oszillators

• Lösung vollständig?

(i) Beh.: $\boxed{a\varphi_\nu \text{ ist Eigenfkt. zu EW } \nu - 1}$

… a „vernichtet" Besetzung

Beweis: $\hat{n}\, a\varphi_\nu \underset{(8.31)(iii)}{=} (a\hat{n} - a)\varphi_\nu = (\nu-1)a\varphi_\nu$ qed

(ii) Annahme: EW $\nu = n + \alpha$, $0 < \alpha < 1$ existiere: $\hat{n}\varphi_\nu = (n+\alpha)\varphi_\nu$

$$\longrightarrow \hat{n}\,(a^{n+1}\varphi_\nu) = [\nu - (n+1)]\,(a^{n+1}\varphi_\nu) = (\alpha - 1)\,(a^{n+1}\varphi_\nu) \quad (8.36)$$

Bilde: $\underbrace{(\alpha - 1)}_{<0}\underbrace{\langle a^{n+1}\varphi_\nu | a^{n+1}\varphi_\nu\rangle}_{>0} = \underbrace{\langle a^{n+2}\varphi_\nu | a^{n+2}\varphi_\nu\rangle}_{>0} > 0$

$\rightarrow \hat{n} = a^+a$

$\longrightarrow$ Widerspruch $\longrightarrow$ (8.36) falsch $\longrightarrow$ (8.34) vollständig

[NB: $\langle a^{n+2}\varphi_\nu | a^{n+2}\varphi_\nu\rangle = 0 \longrightarrow \lightning$ α nicht ganzzahlig]