8.4 Harmonischer Oszillator

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{m}{2}\omega_0^2x^2\right]\varphi(x)=E\,\varphi(x)$$

$$\Big\downarrow\quad \xi=\frac{x}{\xi_0}\,,\ \xi_0=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\qquad (8.25)$$
$$\varepsilon = E/\hbar\omega_0$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{d\xi^2}+\xi^2\right]\varphi(\xi)=\varepsilon\,\varphi(\xi)$$

$$\Big\downarrow\quad a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\qquad (8.27)$$
$$a^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{d\xi}+\xi\right)$$

$$\boxed{(\underbrace{a^+a}_{\hat{n}}+\tfrac{1}{2})\varphi=\varepsilon\varphi}\qquad (8.28)$$

$\hat{n}$ ... Besetzungszahloperator

VR:
$$\boxed{\begin{aligned}[a,a^+]&=1\\ [\hat{n},a^+]&=a^+\\ [\hat{n},a]&=-a\end{aligned}}\qquad (8.31)$$

VR $\rightarrow$ $\hat{n}\varphi_n=n\varphi_n\,,\quad n=0,1,2,\dots\quad \varphi_n=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n\varphi_0$ (8.34)

φ_0 ... Grund/Vakuumzustand: $a\varphi_0=0!$ (8.32)

$\boxed{\varphi_{n-1}\sim a\varphi_n \text{ ist Eigenfkt. zu EW } n-1}$ (8.35)

c) Darstellung im Ortsraum:

· Grundzustand / Vakuumzustand!

(8.32) $\quad a\varphi_0 \overset{(8.27)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\varphi_0(\xi)\overset{!}{=}0 \longrightarrow \int\frac{d\varphi_0}{\varphi_0}=\int-\xi\,d\xi$

$$\longrightarrow \ln\varphi_0=-\frac{\xi^2}{2}+c$$
$$\varphi_0\sim e^{-\xi^2/2}$$

$$\xrightarrow{\xi=\frac{x}{\xi_0}}\quad \boxed{\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,\xi_0}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi_0}\right)^2}\,,\quad \langle\varphi_0|\varphi_0\rangle=1}\qquad (8.36)$$

• Anregungszustände:

$$\varphi_n(x) \overset{(8.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{n!\sqrt{\pi}\xi_0}}(a^+)^n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi_0}\right)^2} \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}\xi_0}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{\xi_0}\right) \quad (8.37)$$

eingeführt:

$$H_n(\xi) = e^{\frac{\xi^2}{2}}(\sqrt{2}a^+)^n e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad , \xi = \frac{x}{\xi_0}$$

$$= e^{\xi^2} \underbrace{e^{-\xi^2/2}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n e^{\xi^2/2}}_{=(-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n} \text{ ... Operator}} e^{-\xi^2}$$

denn: $\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)\left(e^{\xi^2/2} f(\xi)\right) = -e^{\xi^2/2}\frac{d}{d\xi} f(\xi)$

$$\vdots$$

$$\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n\left(e^{\xi^2/2} f(\xi)\right) = (-1)^n e^{\xi^2/2}\frac{d^n}{d\xi^n} f(\xi)$$

$\longrightarrow$ <u>Hermitesche Polynome</u>:

$$\boxed{H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}} \quad (8.38)$$

(i) Bsp.: $H_0(\xi) = 1$, $H_1(\xi) = 2\xi$, $H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$

$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$

(ii) Orthonormierung: Es gilt: $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$ (8.39)

$$\xrightarrow{(8.37)} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) = \sqrt{\pi}\, 2^n n!\ \delta_{nm}$$

NB: Gewichtsfktn. im Skalarprodukt!

(iii) Dgl.: $\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d}{d\xi} + 2n\right] H_n(\xi) = 0$

Beweis zu (iii): (8.29) $a^+ a\, \varphi_n(\xi) = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 - 1\right)\varphi_n = n\varphi_n$

& (8.37)

· harm. Oszillator:

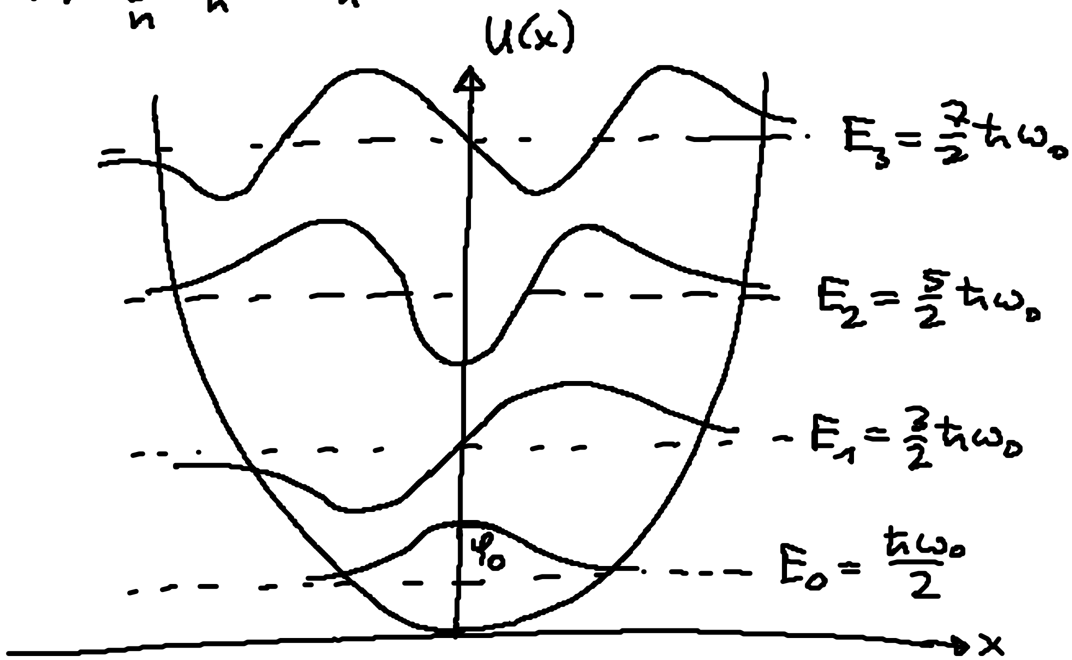
(8.28) $\longrightarrow E_n = \hbar\omega_0 z$

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{H}\varphi_n = E_n\varphi_n \quad \text{mit } \hat{H} = \hbar\omega_0\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) \\ \longrightarrow E_n = \hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}\,\xi_0}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{\xi_0}\right) \\ \qquad\qquad\qquad \text{mit } \xi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \\ n \ldots \text{Zahl der Schwingungsquanten} \end{array}} \quad (8.40)$$

... diskretes, nichtentartetes EW-Spektrum!

(i) $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$ (8.40a)

(ii) $\sum_n \varphi_n(x)\varphi_n(x') = \delta(x-x')$ ... Vollständigkeit (8.40b)



NB: (i) $\varphi_n(x)$ besitzt n Knoten

(ii) $\varphi_n(x) = \begin{cases} \text{gerade}, & n = 0, 2, \ldots \\ \text{ungerade}, & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases} \longleftrightarrow U(x) = U(-x)$

[vgl. Kap. 8.2 b)]

d) Nullpktsenergie:

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \longleftrightarrow \Delta x\,\Delta p = \frac{\hbar}{2}$ ... minimalste Unschärfe

$\hat{=}$ „Nullpkts. schwankung" des Oszillators

Berechnung Unschärfe (8.27) & (8.25) $\longrightarrow$
$$\left.\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{\xi_0}{\sqrt{2}}(a+a^+)\\ \hat{p} &= -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}\,\xi_0}(a-a^+)\end{aligned}\right\} \quad (8.42)$$

$$\langle \hat{x} \rangle \sim \langle \varphi_n | a + a^+ | \varphi_n \rangle = 0$$
$$\langle \hat{p} \rangle \sim \langle \varphi_n | a - a^+ | \varphi_n \rangle = 0$$

$$(\Delta x)^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{\xi_0^2}{2} \langle \varphi_n | \underbrace{a^2}_{\to 0} + \underbrace{aa^+}_{\to n+1} + \underbrace{a^+a}_{\to n} + \underbrace{a^{+2}}_{\to 0} | \varphi_n \rangle = \xi_0^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$(\Delta p)^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle = -\frac{\hbar^2}{2\xi_0^2} \langle \varphi_n | a^2 - aa^+ - a^+a + (a^+)^2 | \varphi_n \rangle = \frac{\hbar^2}{\xi_0^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{\Delta x \, \Delta p = \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right)} \quad (8.43)$$

e) <u>kohärente oder</u> <u>quasiklassische Zustände</u>:

- für Energie-EV gilt: $\langle \hat{x} \rangle = 0$ ... <u>keine</u> Oszillation!

  $\longrightarrow$ Zustände, die klass. Bewegung nahe kommen?

- <u>Def</u>: $\boxed{\text{kohärente Zustände } \psi_\alpha = \text{EV von Vernichtungsoperator } a: \quad a\psi_\alpha = \alpha \psi_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}}$ (8.44)

- Bestimmung von ψ_α: $\psi_\alpha(x) = \sum_n c_n(\alpha) \varphi_n(x)$!

  (i) Entw. koeff:
$$c_n(\alpha) = \langle \varphi_n | \psi_\alpha \rangle \overset{(8.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle (a^+)^n \varphi_0 | \psi_\alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle \varphi_0 | \underbrace{a^n \psi_\alpha}_{\alpha^n \psi_\alpha} \rangle$$

$$\longrightarrow c_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle \varphi_0 | \psi_\alpha \rangle \quad (8.45)$$

(ii) Normierung:

$$1 = \langle \psi_\alpha | \psi_\alpha \rangle = \sum_n |c_n|^2 = |\langle \varphi_0 | \psi_\alpha \rangle|^2 \underbrace{\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}_{e^{|\alpha|^2}} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\longrightarrow \langle \varphi_0 | \psi_\alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \qquad (8.46)$$

$$\longrightarrow \boxed{\psi_\alpha(x) = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \varphi_n(x)} \qquad (8.47)$$

• Eigenschaften: o.B. $\longrightarrow$ Übungen

(i) $\boxed{|\langle \psi_\alpha | \psi_{\alpha'} \rangle|^2 = e^{-|\alpha-\alpha'|^2}}$ (8.48) … nicht orthogonal

klar: $a \neq a^+$!

(ii) Vollständigkeit: $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$

$$\boxed{\frac{1}{\pi} \iint d\alpha_1 \, d\alpha_2 \; \psi_\alpha^*(x) \, \psi_\alpha(x') = \delta(x-x')} \qquad (8.49)$$

• Zeitentwicklung von $\psi_\alpha(x) = \sum_n c_n(\alpha) \varphi_n(x)$, $t=0$

$$\psi_\alpha(x,t) = \sum_n c_n(\alpha,t) \varphi_n(x)$$

$$\text{mit } c_n(\alpha,t) \stackrel{(5.21)}{=} c_n(\alpha) e^{-i E_n t/\hbar} = c_n(\alpha) e^{-i\omega_0 t (n+\frac{1}{2})}$$

$$E_n = \hbar\omega_0 (n+\tfrac{1}{2})$$

(8.47) mit $c_n(\alpha,t)$ $\longrightarrow$

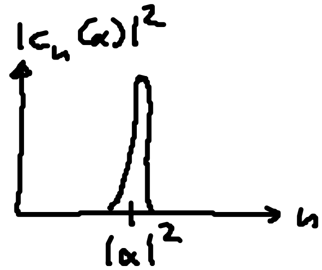
$$\boxed{\begin{aligned} \psi_\alpha(x,t) &= e^{-i\omega_0 t/2} \underline{e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega_0 t})^n}{\sqrt{n!}} \varphi_n(x)} \\ &= e^{-i\omega_0 t/2} \psi_{\alpha(t)}(x) \qquad \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}} \qquad (8.50)$$

• Wahrscheinlichkeit, Energie-EW E_n zu messen:

$$\boxed{|c_n(\alpha,t)|^2 = |c_n(\alpha)|^2 = e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}$$ ... Poissonverteilung!

(i) Maximum bei $n \approx |\alpha|^2$

(ii) Verteilung für $|\alpha^2| \gg 1$



• Energiemittelwert/-unschärfe: o.B. s. Übung

$$\langle \hat{H}\rangle = \langle\psi_\alpha|\hat{H}|\psi_\alpha\rangle = \hbar\omega_0\left(|\alpha|^2+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta E = \left[\langle\psi_\alpha|\hat{H}^2|\psi_\alpha\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2\right]^{1/2} = \hbar\omega_0|\alpha|$$

$$\xrightarrow{|\alpha|\gg 1} \frac{\Delta E}{\langle\hat{H}\rangle} \approx \frac{1}{|\alpha|} \ll 1$$

• Heisenbergsche Unschärferelation: o.B. s. Übung

$$\boxed{\Delta x\,\Delta p = \frac{\hbar}{2}} \quad (8.53)$$

... Unschärfe für ψ_α minimal klein!