

8.4 Harmonischer Oszillator

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2 \right] \varphi(x) = E \varphi(x)$$

$$\downarrow \quad \xi = \frac{x}{\xi_0}, \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \quad (8.25)$$

$$\varepsilon = E/\hbar\omega_0$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right] \varphi(\xi) = \varepsilon \varphi(\xi)$$

$$\downarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{d\xi} + \xi \right) \quad (8.27)$$

$$\downarrow \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{d\xi} + \xi \right)$$

VR:

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= 1 \\ [\hat{n}, a^\dagger] &= a^\dagger \\ [\hat{n}, a] &= -a \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$\boxed{(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \varphi = \varepsilon \varphi} \quad (8.28)$$

$\hat{n} \dots$ Besetzungszahloperator

$$\text{VR} \rightarrow \boxed{\hat{n} \varphi_n = n \varphi_n, \quad n=0,1,2,\dots \quad \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \varphi_0} \quad (8.34)$$

$$\varphi_0 \dots \text{Grund/Vakuumzustand: } a \varphi_0 = 0! \quad (8.32)$$

$$\boxed{\varphi_{n-1} \sim a \varphi_n \text{ ist Eigenfkt. zu EW } n-1} \quad (8.35)$$

c) Darstellung im Ortsraum:

. Grundzustand / Vakuumzustand!

$$(8.32) \quad a \varphi_0 \stackrel{(8.27)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{d\xi} + \xi \right) \varphi_0(\xi) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \int \frac{d\varphi_0}{\varphi_0} = \int -\xi d\xi$$

$$\rightarrow \ln \varphi_0 = -\frac{\xi^2}{2} + c$$

$$\varphi_0 \sim e^{-\xi^2/2}$$

$$\xi = \frac{x}{\xi_0} \rightarrow \boxed{\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \xi_0} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\xi_0} \right)^2}, \quad \langle \varphi_0 | \varphi_0 \rangle = 1} \quad (8.36)$$

• Anregungszustände:

$$\psi_n(x) \stackrel{(8.37)}{=} \frac{1}{\sqrt{n! \sqrt{\pi} \xi_0}} (a^\dagger)^n e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\xi_0}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} \xi_0}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\xi_0}\right)^2} H_n \left(\frac{x}{\xi_0}\right) \quad (8.37)$$

eingeführt

$$H_n(\xi) = e^{\frac{\xi^2}{2}} (\sqrt{2} a^\dagger)^n e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad \xi = \frac{x}{\xi_0}$$

$$= e^{\xi^2} \underbrace{e^{-\xi^2/2} \left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n e^{\xi^2/2}}_{= (-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n} \dots \text{Operator}} e^{-\xi^2}$$

denn: $\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right) \left(e^{\xi^2/2} f(\xi)\right) = -e^{\xi^2/2} \frac{d}{d\xi} f(\xi)$

$$\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n \left(e^{\xi^2/2} f(\xi)\right) = (-1)^n e^{\xi^2/2} \frac{d^n}{d\xi^n} f(\xi)$$

→ Hermiteische Polynome:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \quad (8.38)$$

(i) Bsp: $H_0(\xi) = 1$, $H_1(\xi) = 2\xi$, $H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$$

(ii) Orthonormierung: Es gilt: $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$

$$\stackrel{(8.37)}{\rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}$$

NB: Gewichtsfktn. im Skalarprodukt!

(iii) Dgl.: $\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d}{d\xi} + 2n\right] H_n(\xi) = 0$

Beweis zu (iii): (8.29) $a^\dagger a \psi_n(\xi) = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 - 1\right) \psi_n = n \psi_n$
 & (8.37)

• harm. Oszillator:

(8.28) $\xrightarrow{E_n = \hbar\omega_0/2}$

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n \quad \text{mit } \hat{H} = \hbar\omega_0 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

$$\rightarrow E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} \xi_0}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\xi_0} \right)^2} H_n \left(\frac{x}{\xi_0} \right) \quad (8.40)$$

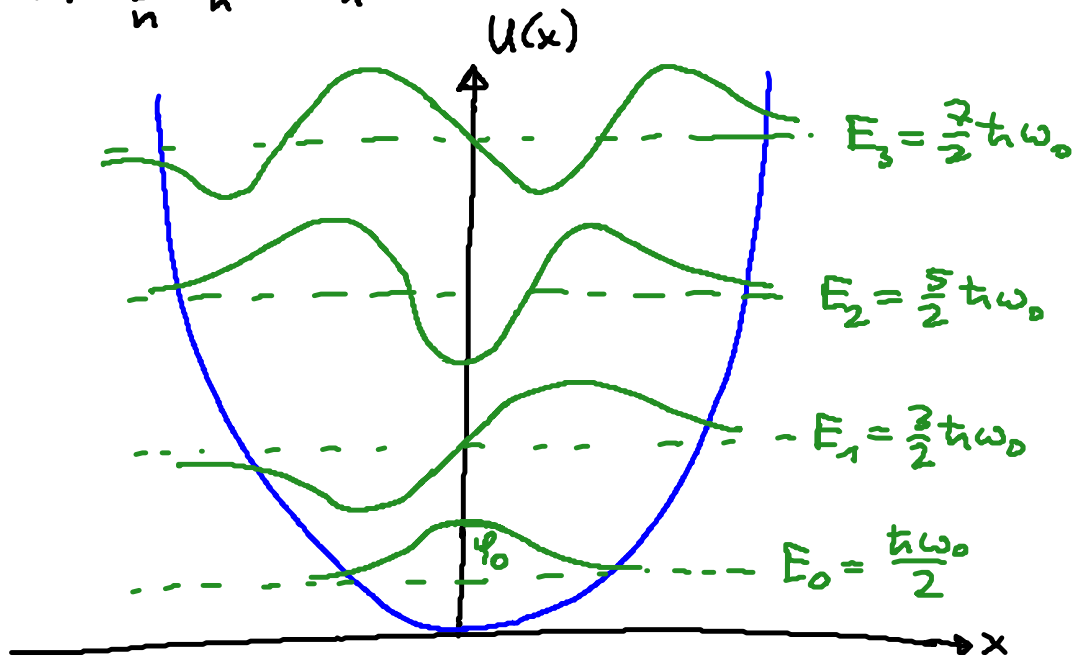
mit $\xi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$

$n \dots$ Zahl der Schwingungsquanten

... diskretes, nichtentartetes EW-Spektrum!

(i) $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (8.40a)$

(ii) $\sum_n \psi_n(x) \psi_n(x') = \delta(x-x') \dots$ Vollständigkeit (8.40b)



NB: (i) $\psi_n(x)$ besitzt n Knoten

(ii) $\psi_n(x) = \begin{cases} \text{gerade,} & n=0, 2, \dots \\ \text{ungerade,} & n=1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad U(x) = U(-x)$
 [vgl. Kap. 8.2 b)]

d) Nullpunktenergie:

$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \longleftrightarrow \Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \dots$ minimale Unsicherheit
 $\hat{=}$ „Nullppts. schwingung“ des Oszillators

Berechnung (8.27) & (8.25) $\rightarrow \hat{x} = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2} \gamma_0} (a + a^\dagger)$
 Unsicherhe $\hat{p} = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2} \gamma_0} (a - a^\dagger)$ } (8.42)

$$\langle \hat{x} \rangle \sim \langle \psi_n | a + a^\dagger | \psi_n \rangle = 0$$

$$\langle \hat{p} \rangle \sim \langle \psi_n | a - a^\dagger | \psi_n \rangle = 0$$

$$(\Delta x)^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \langle \psi_n | \underbrace{a^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{aa^\dagger}_{\rightarrow n+1} + \underbrace{a^\dagger a}_{\rightarrow n} + \underbrace{a^{\dagger 2}}_{\rightarrow 0} | \psi_n \rangle = \hbar^2 (n + \frac{1}{2})$$

$$(\Delta p)^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle = -\frac{\hbar^2}{2\gamma_0^2} \langle \psi_n | a^2 - aa^\dagger - a^\dagger a + (a^\dagger)^2 | \psi_n \rangle = \frac{\hbar^2}{2\gamma_0^2} (n + \frac{1}{2})$$

$$\rightarrow \Delta x \Delta p = \hbar (n + \frac{1}{2}) \quad (8.43)$$

e) Kohärente oder quasi-klassische Zustände:

• für Energie-EV gilt: $\langle \hat{x} \rangle = 0$... keine Oszillation!

\rightarrow Zustände, die klass. Bewegung nahe kommen?

• Def: Kohärente Zustände $\psi_\alpha =$ EV von Vernichtungsoperator a :
 $a \psi_\alpha = \alpha \psi_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}$ (8.44)

• Bestimmung von ψ_α : $\psi_\alpha(x) = \sum_n c_n(\alpha) \psi_n(x)!$

(i) Entw. Koeff:

$$c_n(\alpha) = \langle \psi_n | \psi_\alpha \rangle \stackrel{(8.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle (a^\dagger)^n \psi_0 | \psi_\alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle \psi_0 | \underbrace{a^n}_{\alpha^n} \psi_\alpha \rangle$$

$$\rightarrow c_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle \psi_0 | \psi_\alpha \rangle \quad (8.45)$$

(ii) Normierung:

$$1 = \langle \psi_\alpha | \psi_\alpha \rangle = \sum_n |c_n|^2 = |\langle \psi_0 | \psi_\alpha \rangle|^2 \underbrace{\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}_{e^{|\alpha|^2}} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\rightarrow \langle \psi_0 | \psi_\alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \quad (8.46)$$

$$\rightarrow \psi_\alpha(x) = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x) \quad (8.47)$$

• Eigenschaften: o.B. \rightarrow Übung

(i) $|\langle \psi_\alpha | \psi_{\alpha'} \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \alpha'|^2}$ (8.48) ... nicht orthogonal
Her: $\alpha \neq \alpha^*$!

(ii) Vollständigkeit: $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$

$$\frac{1}{\pi} \iint d\alpha_1 d\alpha_2 \psi_\alpha^*(x) \psi_\alpha(x') = \delta(x-x') \quad (8.49)$$

• Zeitentwicklung von $\psi_\alpha(x) = \sum_n c_n(\alpha) \psi_n(x)$, $t=0$

$$\psi_\alpha(x,t) = \sum_n c_n(\alpha,t) \psi_n(x)$$

mit $c_n(\alpha,t) \stackrel{(5.21)}{=} c_n(\alpha) e^{-iE_n t/\hbar} \stackrel{E_n = \hbar\omega_0(n+\frac{1}{2})}{=} c_n(\alpha) e^{-i\omega_0 t(n+\frac{1}{2})}$

$\xrightarrow{(8.47)}$
mit $c_n(\alpha,t)$

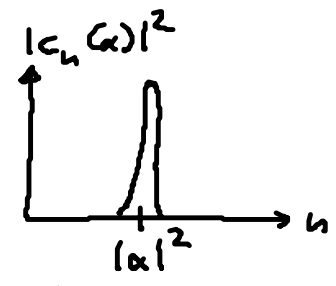
$$\psi_\alpha(x,t) = e^{-i\omega_0 t/2} \underbrace{e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega_0 t})^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x)}_{\psi_{\alpha(t)}(x)} \quad (8.50)$$
$$= e^{-i\omega_0 t/2} \psi_{\alpha(t)}(x) \quad \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega_0 t}$$

• Wahrscheinlichkeit, Energie E_n zu messen:

$$|c_n(\alpha, t)|^2 = |c_n(\alpha)|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \dots \text{Poissonverteilung!}$$

(i) Maximum bei $n \approx |\alpha|^2$

(ii) Verteilung für $|\alpha|^2 \gg 1$



• Energiemittelwert/-unscharfe: o.B. s. Abgabe

$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \psi_\alpha | \hat{H} | \psi_\alpha \rangle = \hbar \omega_0 \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$\Delta E = \left[\langle \psi_\alpha | \hat{H}^2 | \psi_\alpha \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2 \right]^{1/2} = \hbar \omega_0 |\alpha|$$

$$\xrightarrow{|\alpha| \gg 1} \frac{\Delta E}{\langle \hat{H} \rangle} \approx \frac{1}{|\alpha|} \ll 1$$

• Heisenbergsche Unschärferelation: o.B. s. Abgabe

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad (8.53)$$

... Unschärfe für ψ_α minimal klein!