III. Anwendungen der Quantentheorie

11. Der Drehimpuls in der QT

- klass. Mechanik: $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$
  $\underline{L}$ = konstant für Zentralkräfte $\longrightarrow$ Bewegung in Ebene $\perp \underline{L}$

- QT: (i) $\underline{L}$ als Observable: löse EW-Problem
  (ii) wichtig für radialsymmetr. Probleme in 3D: bestimmt/charakterisiert Zustände Bsp: H-Problem
  (iii) Zugang zu Spin = Eigendrehimpuls des e^-

11.1 Definition, Vertauschungsrelationen und Verallgemeinerung

Definition: (ohne ^ !)

Drehimpulsoperator: (Vektoroperator)

Ortsraum

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} \overset{\text{Ortsraum}}{=} \frac{\hbar}{i}\, \underline{r} \times \underline{\nabla} \;, \quad L_i = \varepsilon_{ijk}\, x_j\, p_k && (11.1)\\ &L_i = L_i^+ \;, \quad (\text{da } \underline{r} = \underline{r}^+,\ \underline{p} = \underline{p}^+) && (11.2)\\ &\underline{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad \text{... „Quadrat von } \underline{L}\text{"} && (11.3)\end{aligned}}$$

- Vertauschgsrelationen:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\, \delta_{ij} \xrightarrow[\text{Übungen}]{\text{o.B.}} \boxed{\begin{aligned} &[L_i, L_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} L_k && (11.4)\\ &[\underline{L}^2, L_i] = 0 \;, \quad i = 1,2,3 && (11.5)\end{aligned}}$$

außerdem: $$\boxed{\begin{aligned} [L_i, x_j] &= i\hbar\, \varepsilon_{ijk}\, x_k \quad (11.6)\\ [L_i, p_j] &= i\hbar\, \varepsilon_{ijk}\, p_k \quad (11.7)\end{aligned}}$$

Bem: (i) (11.5) $\longrightarrow$ $\underline{L}^2$ und ein L_i haben gemeinsames VONS von EV

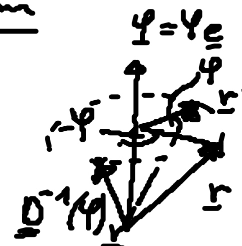
(ii) (11.4) $\longrightarrow$ L_i nicht gleichzeitig scharf meßbar

(iii) (11.4), (11.6/7) gleiche Struktur $\longrightarrow$ s. a)

vgl. (9.43) $T_{\xi} = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{\xi}\cdot\hat{\underline{p}}}$ ... Translationsoperator

a) $\underline{L}$ generiert Drehungen im Ortsraum

· Drehe $\psi(\underline{r}) = \langle \underline{r} | \psi \rangle$ um $\underline{\varphi} = \varphi\, \underline{e}$

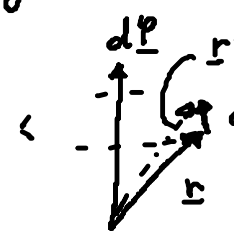


$\underline{r}' = \underline{D}(\varphi)\,\underline{r}$, Matrix $\underline{D}(\varphi) \in SO(3)$

$$\boxed{\psi'(\underline{r}) = \psi(\underbrace{\underline{D}^{-1}(\varphi)\underline{r}}_{\text{gibt bei Rotation um } \varphi \text{ gerade } \underline{r}!})} \quad (11.8)$$

· kleines $\underline{\varphi} = d\underline{\varphi}$, $|d\underline{\varphi}| \ll 1$

$$\underline{r}' = \underline{r} + \underbrace{d\underline{\varphi}\times\underline{r}}_{\perp \underline{r}} = (1 + d\underline{\varphi}\times)\,\underline{r}$$



bzw: $\underline{r} = \underbrace{(1 - d\underline{\varphi}\times)}_{\underline{D}^{-1}(d\underline{\varphi}) = \underline{D}(-d\underline{\varphi})}\underline{r}'$ (Rotation mit $-d\underline{\varphi}$!

damit $\psi'(\underline{r}) = \psi((1 - d\underline{\varphi}\times)\underline{r}) \overset{\text{Taylor}}{\approx} \psi(\underline{r}) - (d\underline{\varphi}\times\underline{r})\cdot\underline{\nabla}\psi$

(„Spatprodukt") $= \psi(\underline{r}) - d\underline{\varphi}\cdot\underbrace{(\underline{r}\times\underline{\nabla})}_{\frac{i}{\hbar}\underline{L} \quad [\text{s } (11.1)]}\psi$

$$\boxed{\psi'(\underline{r}) = \underbrace{U(d\underline{\varphi})}_{\text{Operator}} \psi(\underline{r}) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\underline{\varphi}\cdot\underline{L}\right)\psi(\underline{r})} \quad (11.9)$$

· beliebige Rotation: $\underline{\varphi} = \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{\frac{\underline{\varphi}}{n}}_{d\underline{\varphi}}\Big)^n$

also $U(\underline{\varphi}) = \lim_{n\to\infty} \Big[U\Big(\underbrace{\frac{\underline{\varphi}}{n}}_{d\underline{\varphi}}\Big)\Big]^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{i}{\hbar}\frac{\underline{\varphi}}{n}\cdot\underline{L}\right)^n$

[$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ $\longrightarrow$ $$\boxed{U(\underline{\varphi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{\varphi}\cdot\underline{L}}} \quad (11.10)$$

... Rotationsoperator („darstellungsfrei")

Bem: (i) „$\underline{L}$ generiert Drehung": $\boxed{|\psi'\rangle = U(\underline{\varphi})|\psi\rangle}$ (11.11)

(ii) unitärer Operator:

$$\boxed{U^+(\underline{\varphi}) \underset{\substack{\underline{L}=\underline{L}^+ \\ (-i)^+ = i}}{=} e^{\frac{i}{\hbar}\underline{\varphi}\cdot\underline{L}} \underset{\text{inverses }\underline{\varphi}\,:\,-\underline{\varphi}}{=} U^{-1}(\underline{\varphi})} \quad (11.12)$$

(iii) erhält Norm von $|\psi\rangle$

$$\langle U(\underline{\varphi})\psi | U(\underline{\varphi})\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

$U^+ = U^{-1}$

· Rotation von Operatoren A:

$$U(\underline{\varphi})\, A|\psi\rangle = U(\underline{\varphi})\, A \underbrace{U^+(\underline{\varphi}) U(\underline{\varphi})}_{=1} |\psi\rangle \overset{!}{=} A'|\psi'\rangle$$

$$\longrightarrow \boxed{A' = U(\underline{\varphi})\, A\, U^+(\underline{\varphi})} \quad (11.13)$$

· Folgerungen: mit $\underline{\varphi} = d\underline{\varphi}$, $|d\underline{\varphi}| \ll 1$: $U(\underline{\varphi}) \underset{(11.9)}{\approx} 1 - \frac{i}{\hbar} d\underline{\varphi}\cdot\underline{L}$

$$A' = \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\underline{\varphi}\cdot\underline{L}\right) A \left(1 + \frac{i}{\hbar} d\underline{\varphi}\cdot\underline{L}\right)$$

$$= A - \frac{i}{\hbar} d\varphi_j L_j A + A \frac{i}{\hbar} d\varphi_j L_j + O(d\varphi^2)$$

$$\longrightarrow \boxed{A' = A - \frac{i}{\hbar} d\varphi_j [L_j, A]} \quad (11.14)$$

Bem.: (i) „drehinvariante Operatoren":

$$A' = A, \quad \text{falls } \boxed{[L_j, A] = 0} \quad (11.15)$$

$\longrightarrow$ L_j, A haben gemeinsames VONS von EV!!!

Bsp. $\underbrace{A = L^2, \quad p^2, \; r^2, \; H = \frac{p^2}{2m} + V(|r|)}$

„Beträge" ändern sich nicht bei Rotation"

(ii) Vektoroperator $\underline{V}$:

$$\underline{V}' = \underline{V} - d\underline{\varphi} \times \underline{V} \quad \ldots \text{ Rotation von Vektor um } -d\underline{\varphi}!$$

$$\text{bzw.: } V_k' = V_k - \overbrace{\varepsilon_{kjl}}^{-\varepsilon_{jkl}} d\varphi_j V_l \underset{(11.14)}{\overset{!}{=}} V_k - \frac{i}{\hbar} d\varphi_j [L_j, V_k]$$

$$\boxed{[L_j, V_k] = i\hbar \, \varepsilon_{jkl} V_l} \quad (11.16)$$

... Beweis von (11.4), (11.6) (11.7) für $V_k = L_k, x_k, p_k$

b) Verallgemeinerung

Führe ein: Drehimpulsoperator $\underline{J} = \underline{J}^+$ im Hilbertraum $\mathcal{R}$

definiert durch: $[J_i, J_j] = i\hbar \, \varepsilon_{ijk} J_k$ (11.17)

$[\underline{J}^2, J_i] = 0 \quad , i = 1,2,3$ (11.18)

$$\boxed{\text{Drehung in } \mathcal{R}: \; U(\underline{\varphi})|\phi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{\varphi}\cdot\underline{J}}|\phi\rangle} \quad (11.19)$$

NB: $\langle \phi | \phi \rangle = \langle U\phi | U\phi \rangle$

11.2 Algebraische Lösung des EW-Problems

- Konvention: $[J^2, J_z] = 0 \longrightarrow$ gemeinsame EV von J^2, J_z

$$\boxed{\begin{aligned} J_z |jm\rangle &= \hbar m |jm\rangle , \quad m \text{ ... magnetische (Drehimpuls) Quantenzahl} \\ J^2 |jm\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle , \quad j \geq 0 \text{ ... Drehimpuls-Quantenzahl} \end{aligned}} \quad (11.20)$$

Bem: (i) Einheit: $[J_i] = [\hbar]$!

(ii) $j(j+1)$? .. o.B.d.A

(iii) $j \geq 0$

$$\langle jm | jm\rangle = 1 \xrightarrow[\langle jm|\,(11.20)\rangle]{} \hbar^2 j(j+1) = \langle jm | J_i^2 | jm\rangle$$
$$= \langle J_i\, jm | J_i\, jm\rangle$$
$$= \geq 0 \quad \text{qed}$$

- Ziel: Erlaubte Werte von j, m aus Drehimpulsalgebra (11.17/18)