

### III. Anwendungen der Quantentheorie

#### 11. Der Drehimpuls in der QT

- Klass. Mechanik:  $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$   
 $\underline{L} = \text{konstant}$  für Zentralkräfte  $\rightarrow$  Bewegung in Ebene  $\perp \underline{L}$
- QT: (i)  $\underline{L}$  als Observable: löse EW-Problem  
(ii) wichtig für radial symmetr. Probleme in 3D:  
bestimmt/charakterisiert Zustände Bsp: H-Problem  
(iii) Zugang zu Spin = Eigendrehimpuls des  $e^-$

#### 11.1 Definition, Vertauschungsrelationen und Verallgemeinerung

Definition: (ohne  $\wedge$ !)

Drehimpulsoperator:  
(Vektoroperator)

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} \stackrel{\text{Ortsraum}}{=} \frac{\hbar}{i} \underline{r} \times \underline{\nabla}, \quad L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k \quad (11.1)$$

$$L_i = L_i^\dagger, \quad (\text{da } \underline{r} = \underline{r}^\dagger, \underline{p} = \underline{p}^\dagger) \quad (11.2)$$

$$\underline{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \dots \text{„Quadrat von } \underline{L}^{\text{“}} \quad (11.3)$$

• Vertauschungsrelationen:

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \xrightarrow[\text{Übung}]{\text{o.B.}}$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k \quad (11.4)$$

$$[\underline{L}^2, L_i] = 0, \quad i=1,2,3 \quad (11.5)$$

außerdem.

$$[L_i, x_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} x_k \quad (11.6)$$

$$[L_i, p_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} p_k \quad (11.7)$$

Bem: (i) (11.5)  $\rightarrow \underline{L}^2$  und ein  $L_i$  haben gemeinsames VONS von EV

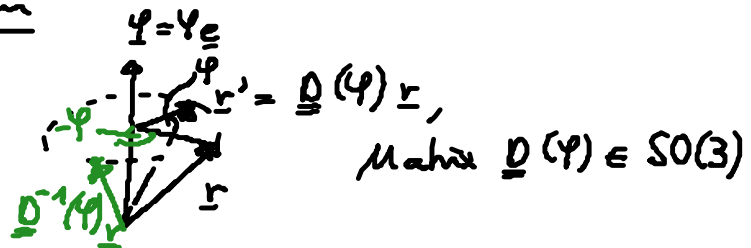
(ii) (11.4)  $\rightarrow L_i$  nicht gleich zeitig exakt meßbar

(iii) (11.4), (11.6/7) gleiche Struktur  $\rightarrow$  s. a)

vgl. (9.43)  $T_{\underline{z}} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{p} \cdot \underline{z}}$  ... Translationsoperator

a)  $\underline{L}$  generiert Drehungen im Ortsraum

• Drehe  $\psi(\underline{r}) = \langle \underline{r} | \psi \rangle$  um  $\underline{\varphi} = \varphi \underline{e}$

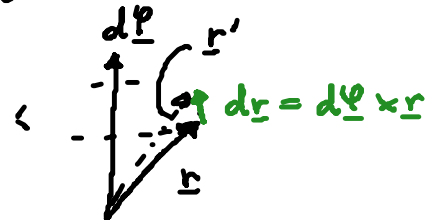


$$\psi'(\underline{r}) = \psi(\underline{D}^{-1}(\varphi)\underline{r}) \quad (11.8)$$

gibt bei Rotation um  $\varphi$  gerade  $\underline{r}'$ !

• Kleines  $\varphi = d\varphi$ ,  $|d\varphi| \ll 1$

$$\underline{r}' = \underline{r} + \underbrace{d\varphi \times \underline{r}}_{\perp \underline{r}} = (1 + d\varphi \times) \underline{r}$$



bzw:  $\underline{r} = (1 - d\varphi \times) \underline{r}'$  (Rotation mit  $-d\varphi$ !)

$$\underline{D}^{-1}(d\varphi) = \underline{D}(-d\varphi)$$

damit  $\psi'(\underline{r}) = \psi((1 - d\varphi \times) \underline{r}) \stackrel{\text{Taylor}}{\approx} \psi(\underline{r}) - (d\varphi \times \underline{r}) \cdot \nabla \psi$

$$\left( \text{„Spatprodukt“} \right) = \psi(\underline{r}) - d\varphi \cdot \underbrace{(\underline{r} \times \nabla)}_{\frac{i}{\hbar} \underline{L}} \psi \quad [s. (11.1)]$$

$$\psi'(r) = \underbrace{U(d\varphi)}_{\text{Operator}} \psi(r) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\varphi \cdot \underline{L}\right) \psi(r) \quad (11.9)$$

• beliebige Rotation:  $\underline{\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi}{n}\right)^n$

also  $U(\underline{\varphi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \underbrace{U\left(\frac{\varphi}{n}\right)}_{\text{Operator}} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \frac{\varphi}{n} \cdot \underline{L}\right)^n$

$\left[ e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right] \longrightarrow U(\underline{\varphi}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \underline{\varphi} \cdot \underline{L}} \quad (11.10)$

... Rotationsoperator („darstellungsfrei“)

Bem: (i) „ $\underline{L}$  generiert Drehung“:  $|\psi'\rangle = U(\underline{\varphi}) |\psi\rangle \quad (11.11)$

(ii) unitärer Operator:

$$U^\dagger(\underline{\varphi}) = e^{+\frac{i}{\hbar} \underline{\varphi} \cdot \underline{L}} = U^{-1}(\underline{\varphi}) \quad (11.12)$$

$\uparrow$   $\underline{L} = \underline{L}^\dagger$   $\uparrow$   $\text{inverses } \underline{\varphi} : -\underline{\varphi}$   
 $(-i)^\dagger = i$

(iii) erhält Norm von  $|\psi\rangle$

$$\langle U(\underline{\varphi}) \psi | U(\underline{\varphi}) \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$$

$U^\dagger = U^{-1}$

• Rotation von Operatoren A:

$$U(\underline{\varphi}) A |\psi\rangle = U(\underline{\varphi}) A \underbrace{U^\dagger(\underline{\varphi}) U(\underline{\varphi})}_{=1} |\psi\rangle = A' |\psi'\rangle$$

$$\longrightarrow A' = U(\underline{\varphi}) A U^\dagger(\underline{\varphi}) \quad (11.13)$$

• Folgerungen: mit  $\underline{\varphi} = d\varphi$ ,  $|d\varphi| \ll 1$ :  $U(\underline{\varphi}) \approx 1 - \frac{i}{\hbar} d\varphi \cdot \underline{L}$  (11.9)

$$A' = \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\varphi_j \cdot \underline{L}_j\right) A \left(1 + \frac{i}{\hbar} d\varphi_j \cdot \underline{L}_j\right)$$

$$= A - \frac{i}{\hbar} d\varphi_j \cdot \underline{L}_j A + A \frac{i}{\hbar} d\varphi_j \cdot \underline{L}_j + O(d\varphi^2)$$

$$\rightarrow A' = A - \frac{i}{\hbar} d\varphi_j [L_j, A] \quad (11.14)$$

Bem.: (i) „drehinvariante Operatoren“:

$$A' = A, \text{ falls } [L_j, A] = 0 \quad (11.15)$$

$\rightarrow L_j, A$  haben gemeinsames VONS von  $E \in V$ !!!

$$\text{Bsp. } A = L^2, \quad p^2, \quad r^2, \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(|r|)$$

„Beträge“, ändern sich nicht bei Rotation!

(ii) Vektoroperator  $\underline{V}$ :

$$\underline{V}' = \underline{V} - d\varphi \times \underline{V} \quad \dots \text{ Rotation von Vektor um } -d\varphi!$$

$$\text{bzw. } V'_k = V_k - \sum_{j,l} \overset{-\varepsilon_{jkl}}{\varepsilon_{jkl}} d\varphi_j V_l \stackrel{!}{=} V_k - \frac{i}{\hbar} d\varphi_j [L_j, V_k] \quad (11.16)$$

$$[L_j, V_k] = i\hbar \varepsilon_{jkl} V_l \quad (11.16)$$

... Beweis von (11.4), (11.6) (11.7) für  $V_k = L_k, x_k, p_k$

b) Verallgemeinerung

Führe ein: Drehimpulsoperator  $\underline{J} = \underline{J}^\dagger$  im Hilbertraum  $\mathcal{R}$

$$\text{definiert durch: } [J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k \quad (11.17)$$

$$[J^2, J_i] = 0, \quad i=1,2,3 \quad (11.18)$$

$$\text{Drehung in } \mathcal{R}: U(\varphi)|\phi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \varphi \cdot \underline{J}} |\phi\rangle \quad (11.19)$$

$$\underline{NB}: \langle \phi | \phi \rangle = \langle U\phi | U\phi \rangle$$

## 11.2 Algebraische Lösung des EW-Problems

• Konvention:  $[J^2, J_z] = 0 \rightarrow$  gemeinsame EV von  $J^2, J_z$

$$\begin{aligned} J_z |j m\rangle &= \hbar m |j m\rangle, \quad m \dots \text{magnetische (Drehimpuls)} \\ &\quad \text{Quantenzahl} \\ J^2 |j m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |j m\rangle, \quad j \geq 0 \dots \text{Drehimpuls-} \\ &\quad \text{Quantenzahl} \end{aligned} \quad (11.20)$$

Bem: (i) Einleit:  $[J_i] = [\hbar]$ !

(ii)  $j(j+1) \geq \dots$  o.B.d.A

(iii)  $j \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle j m | j m \rangle &= 1 \xrightarrow{\langle j m | (11.20) \rangle} \hbar^2 j(j+1) = \langle j m | J_i^2 | j m \rangle \\ &= \langle J_i j m | J_i j m \rangle \\ &= \geq 0 \text{ qed} \end{aligned}$$

• Ziel: Erlaubte Werte von  $j, m$  aus Drehimpulsalgebra (11.17/18)