I. Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie

I.1. Binomialverteilung, Begriffe

betrachte Münzwurf: Kopf oben mit Wahrsch. p_1
Zahl " " " p_2

$$p_1 + p_2 = 1$$

mache N Würfe, wobei N_1: Zahl der Würfe mit Ergebnis „Kopf oben"

N_2: Zahl der Würfe mit Zahl oben

$(N_2 = N - N_1)$

es gilt:

$$p_1 = \lim_{N \to \infty} \frac{N_1}{N}, \quad p_2 = \lim \frac{N_2}{N}$$

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit (W), 2mal hintereinander Kopf oben zu werfen:

$$p_1^2$$

• Wahrsch., hintereinander Kopf und Zahl zu werfen

$$p_1 \cdot p_2$$

Dabei haben wir angenommen, dass aufeinanderfolgende Würfe statistisch unabhängig sind!

Wahrsch. für eine bestimmte Sequenz von Ergebnissen bei N Würfen:

$$p_1^{N_1} \, p_2^{N_2} \qquad (N_1 + N_2 = N)$$

Beachte: Es gibt viele Möglichkeiten, N Würfe so durchzuführen, dass N_1 mit Kopf oben und N_2 mit Zahl oben landen!

Anzahl dieser Möglichkeiten: $\dfrac{N!}{N_1! \, N_2!}$

denn:

$N!$: Zahl der Möglichkeiten, N Ereignisse (Würfe) auf die mögl. Ergebnisse zu verteilen

Division $N_1!\,N_2!$, da die N_1 ~~Energi~~ Ergebnisse ununterscheidbar sind, ebenso die N_2 Ergebnisse

$\Longrightarrow$ Wahrsch., N_1 mal "Kopf oben" und N_2 mal "Zahl oben" <u>unabhängig von der Reihenfolge</u> zu werfen:

"Binomialverteilung"
$$\boxed{W_N(N_1) = p_1^{N_1}\, p_2^{N_2}\, \frac{N!}{N_1!\, N_2!}}$$

mit
$$p_2 = 1 - p_1$$
$$N_2 = N - N_1$$

Beispiel für <u>diskrete</u> Zufallsverteilung

<u>Zusammenhang zum Binomialsatz:</u>

$$(p_1+p_2)^N = \sum_{N_1=0}^{N} \underbrace{\underbrace{\binom{N}{N_1}}_{\frac{N!}{N_1!\,(N-N_1)!}} p_1^{N_1}\, p_2^{N-N_1}}_{W_N(N_1)}$$

benutze:

$p_1 + p_2 = 1$

$\overset{\Longrightarrow}{\text{Binomialsatz}}$ $$\boxed{\sum_{N_1=0}^{N} W_N(N_1) = 1}$$

Normiertheit

Berechne nun den Mittelwert von N_1

allgemein: Mittelwert für diskret Verteilung

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{l=1}^{M} W(x_l)\, x_l}{\sum_{l=1}^{M} W(x_l)}$$

hier: $W_N(N_1)$ bereits normiert!

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^{N} N_1 \, W_N(N_1)$$

Einsetzen von $W_N(N_1)$

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^{N} \frac{N!}{N_1!\, N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} N_1$$

Trick: Fasse zunächst p_1, p_2 als unabhängige Variable auf und benutze:

$$N_1 p_1^{N_1} = p_1 \frac{\partial}{\partial p_1}\left(p_1^{N_1}\right)$$

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^{N} \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1 \left(\frac{\partial}{\partial p_1} p_1^{N_1}\right) p_2^{N_2}$$

$$= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \Bigg(\underbrace{\sum_{N_1=0}^{N} \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2}}_{(p_1+p_2)^N} \Bigg)$$

Binomialsatz!

$$= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} (p_1+p_2)^N = p_1 N (p_1+p_2)^{N-1}$$

$$\underset{p_1+p_2=1}{=} \underline{\underline{p_1 N}}$$

Schwankungen:

Definition:

$$\Delta N_1 = N_1 - \langle N_1 \rangle$$

Abweichung vom Mittelwert

beachte: $\langle \Delta N_1 \rangle = \langle N_1 \rangle - \underbrace{\langle\langle N_1 \rangle\rangle}_{\langle N_1 \rangle}$

$= 0$

mittlere
quadratische Schwankung:

$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle$

$$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = \underbrace{\langle (N_1 - \langle N_1 \rangle)^2 \rangle}_{\text{zeigt, dass die quadrat. Schwankung positiv ist!}}$$

$$= \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \langle N_1 \rangle \rangle - \langle \langle N_1 \rangle N_1 \rangle + \langle \langle N_1 \rangle^2 \rangle$$

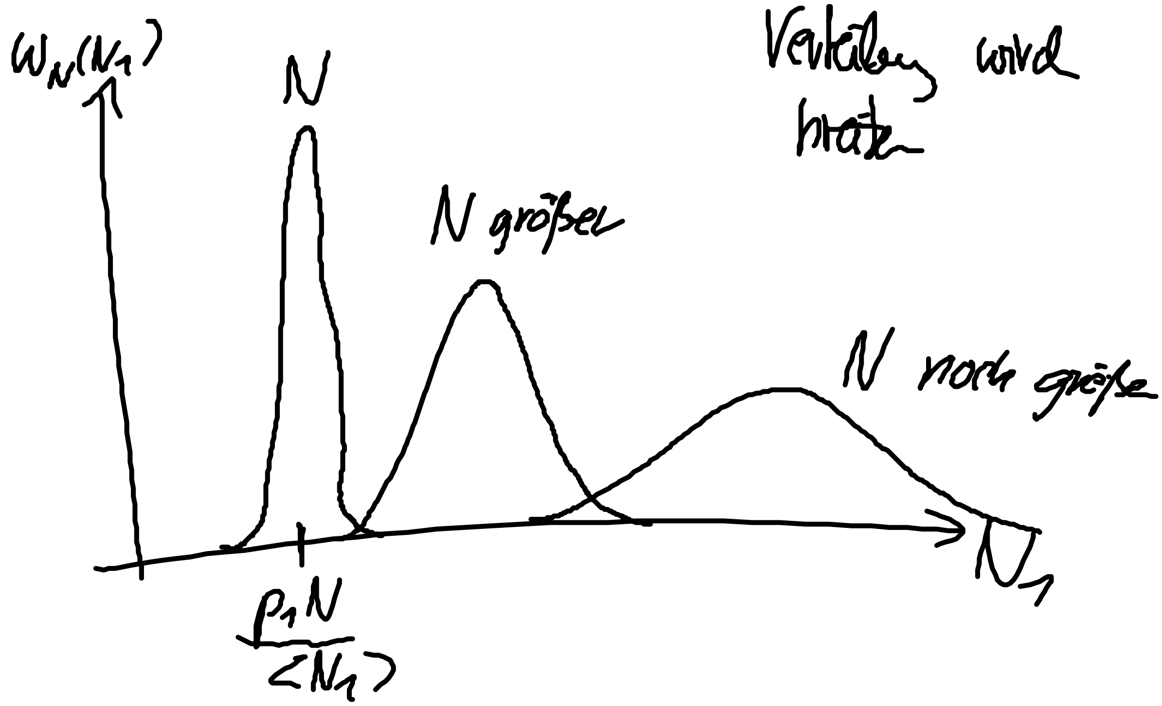
$$= \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2 - \langle N_1 \rangle^2 + \langle N_1 \rangle^2$$

$$= \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2$$

Speziell für die Binomialverteilung
findet man (→ Übung)

$$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = N p_1 p_2$$

Bild dazu



Verteilung wird breiter

Alternative zur direkten Auswertung von Mittelwerten:

$\Longrightarrow$ Charakteristische Funktion

allg.: gegeben sei Zufallsvariable x mit Werten x_l, $l = 1, \dots, M$
diskret
Verteilung $W(x_l)$

definiere:

$$f(k) = \langle e^{ikx} \rangle$$
$$= \sum_{l=1}^{M} e^{ikx_l} W(x_l)$$

$\boxed{W(x_l) \text{ normiert!}}$

es gilt:

$$\langle x^n \rangle = (-i)^n \frac{d^n f}{dk^n}\Big|_{k=0}$$

n-tes Moment der Variable

Beispiel: gewöhnlicher Mittelwert ($n=1$)

$$\langle x \rangle = (-i) \frac{df}{dk}\Big|_{k=0} = (-i) \frac{d}{dk} \sum_{l=1}^{M} e^{ikx_l} W(x_l)$$

$$= (-i) \sum_{l=1}^{M} i x_l e^{ikx_l} W(x_l)$$

$$= \underbrace{-i^2}_{1} \sum_l x_l e^{ikx_l} W(x_l)\Big|_{k=0}$$

$$= \sum_l x_l W(x_l)$$

entspricht früherer Definition des Mittelwertes.

Falls alle Momente existieren.

$$f(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \frac{d^n f}{dk^n}\Big|_{k=0} = \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle$$

speziell Binomialverteilung:

$$f(k) = \sum_{N_1=0}^{N} \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} e^{ikN_1}$$

$$= \sum_{N_1} \binom{N}{N_1} \left(p_1 e^{ik}\right)^{N_1} p_2^{N_2}$$

$$= \left(p_1 e^{ik} + p_2\right)^N$$

Binomialsatz

Mittelwert: $\langle N_1 \rangle = -i \frac{df}{dk}\Big|_{k=0} = \Big[-i N \left(p_1 e^{ik} + p_2\right)^{N-1} \cdot i p_1 e^{ik}\Big]_{k=0}$

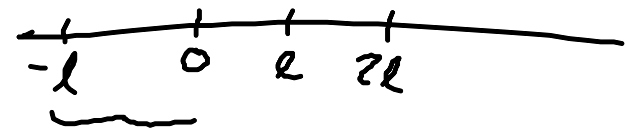
$$\Rightarrow \langle N_1 \rangle = \underbrace{-i^2}_{1} N \left(p_1 + p_2\right)^{N-1} p_1$$

$$= p_1 N \quad ✓✓$$

Typisches Anwendungsbeispiel der Binomialverteilung

Zufallsbewegung ("Random walk")

z.B. in einer Dimension



Schritte konstanter Länge l

Wahrsch. für Schritt nach rechts: p_1

" " " " links p_2

Annahme: Schritte statistisch unabhängig

("Betrunkener")

Wahrsch: $$W_N(N_1) = \frac{N!}{N_1!\,N_2!}\, p_1^{N_1}\, p_2^{N_2}$$

N_1: Zahl der Schritte nach rechts

Wahrsch, den Betrunkenen am Ort x zu finden

$$x = l\langle N_1\rangle - l\langle N_2\rangle$$

$$\Rightarrow x = l\langle N_1\rangle - l\langle \overset{N-N_1}{N_2}\rangle$$

$$= l\langle N_1\rangle - lN + l\langle N_1\rangle$$

$$= 2l\,p_1 N - lN = lN(2p_1 - 1)$$

$\langle N_1\rangle = p_1 N$

$$= lN(p_1 - p_2)$$

$p_1 + p_2 = 1$

$\Rightarrow x = 0$ falls $p_1 = p_2$, wie erwartet!

I.2. Von der Binomial- zur Gaussverteilung

Erinnerung: Bei Binomialverteilung $\langle N_1\rangle = Np_1$

$$\langle(\Delta N_1)^2\rangle = Np_1p_2$$

Betrachte relative Schwankung

Definition $$\frac{\sqrt{\langle(\Delta N_1)^2\rangle}}{\langle N_1\rangle} = \frac{\sqrt{Np_1p_2}}{Np_1} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\sqrt{\frac{1}{N}}$$

d.h.: Die relative Schwankung verschwindet für $N \to \infty$!!

Für sehr große N wird diese Binomialverteilung "scharf lokalisiert"

Wir werden sehen:
Dieses Verhalten der relativen Schwankung ("Gesetz der großen Zahlen") gilt auch unter viel allgemeineren Bedingungen, also nicht für die Binomialverteilung!

Ziel jetzt: Betrachte die Binomialverteilung für sehr große N

Idee: Taylorentwicklung um das Maximum

aber: Da $W_N(N_1)$ für große N "scharf lokalisiert" ist um $\langle N_1 \rangle$, ist es sinnvoll den Logarithmus zu entwickeln!

<u>Beispiel</u>

$$f(n) = p^n = e^{n \ln p}$$

entwickle um irgendeinen Wert $n = \bar{n}$

$$\text{Taylor: } f(n) \approx \underbrace{f(\bar{n})}_{p^{\bar{n}}} + \underbrace{f'(\bar{n})}_{\ln p \, p^{\bar{n}}}(n - \bar{n}) + O((n-\bar{n})^2)$$

Für große $\bar{n}$ werden die Koeffizienten wieder groß!

Taylor-Entw. des Logarithmus:

$$\ln f(n) = n \ln p$$

$$= \bar{n} \ln p + \ln p \, (n - \bar{n})$$

keine höhere Terme

Anwendung auf den Logarithmus der Binomialverteilung

$$W_N(N_1) = \frac{N!}{N_1! \, N_2!} \, p_1^{N_1} p_2^{N_2}$$

$$\ln W_N(N_1) = \ln N! - \ln N_1! - \ln N_2! + N_1 \ln p_1 + N_2 \ln p_2$$

Entwickle um $\langle N_1 \rangle = N p_1$

bei (zunächst) festem N

1. Ableitung:

$$\left.\frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1}\right|_{N_1 = \langle N_1 \rangle}$$

Betrachte:

$$\frac{d \ln N_1!}{dN_1} \approx \frac{\ln((N_1+1)!) - (\ln N_1!)}{1} = \ln \frac{(N_1+1)!}{N_1!} = \ln(N_1+1) \approx \ln N_1$$

Annäherung durch Differenzenquotient o.k. $N_1 \gg 1$

(alternativ

$$\ln N_1! \approx N_1 \ln N_1 - N_1$$

Stirling-Formel)
(Näherung für $N_1 \gg 1$)

analog

$$\frac{d \ln N_2!}{dN_1} = \frac{d \ln (N-N_1)!}{dN_1}$$

$$\approx \frac{\ln(N-N_1-1)! - \ln(N-N_1)!}{1}$$

$$= -\ln(N-N_1)$$

Insgesamt in dieser Näherung:

$$\frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1} = -\ln N_1 + \ln(N-N_1) + \ln p_1 - \ln p_2$$

Auswertung bei $N_1 = \langle N_1 \rangle = Np_1$

$$\Rightarrow \left.\frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1}\right|_{\langle N_1 \rangle} = -\ln Np_1 + \ln(\overbrace{N - Np_1}^{N(\overbrace{1-p_1}^{p_2})}) + \ln p_1 - \ln p_2$$

$$= \cancel{-\ln N} \cancel{- \ln p_1} \cancel{+ \ln N} \cancel{+ \ln p_2} \cancel{+ \ln p_1} \cancel{- \ln p_2}$$

$$\left.\frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1}\right|_{\langle N_1 \rangle} = 0$$

o.U., weil wir um ein Extremum entwickeln

2. Ableitung:

$$\left.\frac{d^2 \ln W_N(N_1)}{dN_1}\right|_{\langle N_1\rangle} = \ldots\ldots = -\frac{1}{\langle(\Delta N_1)^2\rangle} < 0$$

da Maximum.

Taylorentwicklung des Logarithmus

$$\ln W_N(N_1) = \ln W_N(\langle N_1\rangle) - \frac{1}{2}\frac{1}{\langle(\Delta N_1)^2\rangle}\left(N_1 - \langle N_1\rangle\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(N_1 - \langle N_1\rangle\right)^3\right)$$

mit $\langle(\Delta N_1)^2\rangle = N p_1 p_2$