Wh:

$$W_N(N_1) = p_1^{N_1} p_2^{N_2} \underbrace{\frac{N!}{N_1!\,N_2!}}_{\binom{N}{N_1}}$$

Binomialverteilung

$p_2 = 1 - p_1$

$N_2 = N - N_1$

$\langle N_1 \rangle = p_1 N \quad , \quad \langle (\Delta N_1)^2 \rangle = N p_1 p_2$

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle}}{\langle N_1 \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \quad !$$

relative Schwankungen

große N : Entwickle $\ln W_N(N_1)$ für große N um den Mittelwert $\langle N_1 \rangle$

$$\ln W_N(N_1) = \ln W_N(\langle N_1 \rangle) \cancel{+ \frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1}\Big|_{\langle N_1 \rangle}} (N_1 - \langle N_1 \rangle)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1^2}\Big|_{\langle N_1\rangle} (N_1 - \langle N_1\rangle)^2$$

$$+ \mathcal{O}\left((N_1 - \langle N_1\rangle)^3\right)$$

mit $\displaystyle \frac{d^2 \ln W_N(N_1)}{dN_1^2}\Big|_{\langle N_1\rangle}$

$$= -\frac{1}{N p_1 p_2} = -\frac{1}{\langle(\Delta N_1)^2\rangle} < 0$$

Einsetzen in die Entwicklung, ~~Kub~~ vernachlässige Terme ab dem kubischen Term

$$\Rightarrow \ln W_N(N_1) \approx \underbrace{\ln W_N(\langle N_1\rangle) - \frac{1}{2}\frac{(N_1 - \langle N_1\rangle)^2}{\langle(\Delta N_1)^2\rangle}}_{\ln \tilde{W}_N(N_1)}$$

$$\tilde{W}_N(N_1) = W_N(\langle N_1\rangle) e^{-\frac{1}{2}\frac{(N_1 - \langle N_1\rangle)^2}{\langle(\Delta N_1)^2\rangle}}$$

beschreibt Verteilung dicht am Maximum

Normierung von $\hat{W}_N(N_1)$

$$\sum_{N_1=0}^{N} \hat{W}_N(N_1) \overset{!}{=} 1$$

Normierung der diskreten Verteilung

approximiere Summe durch Integral

(o.k. für große N und damit große N_1)

$$\underbrace{\int_0^N dx \, \underbrace{\hat{W}_N(x)}_{\text{Wahrscheinlichkeitsdichte}} = 1}$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \underbrace{\hat{W}_N(x)}_{A \, e^{-\frac{(x-\langle N_1\rangle)^2}{2\langle(\Delta N_1)^2\rangle}}} \overset{!}{=} 1$$

Gauss-Integral

A ← Faktor, der jetzt festzulegen ist

benutze:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, A\, e^{-\frac{(x-\langle N_1\rangle)^2}{2\langle(\Delta N_1)^2\rangle}}$$

$$= A \cdot \sqrt{2\pi}\sqrt{\langle(\Delta N_1)^2\rangle} \overset{!}{=} 1$$

$$\rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\langle(\Delta N_1)^2\rangle}}$$

Endergebnis

$$\hat{W}_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\langle(\Delta N_1)^2\rangle}}\, e^{-\frac{(x-\langle N_1\rangle)^2}{2\langle(\Delta N_1)^2\rangle}}$$

nämlich

Gaußverteilung!

Erinnerung:

Die Voraussetzung für unsere Näherungen war

$N_1 \gg 1$, soll speziell auch am Maximum $\langle N_1 \rangle = N p_1$ gelten

$\Rightarrow N \gg 1$

I.3. Zentraler Grenzwertsatz

Gegeben sei nun eine Summe von Zufallsgrößen s_i $(i = 1, \dots, N)$, welche durch unabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilungen $w_i(s_i)$ charakterisiert sind

$$X = s_1 + s_2 + \dots + s_N$$

Ziel: Was ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für X im Limes großer N?

Beispiel:

- s_i: Schrittlänge des i-ten Schrittes bei einer Zufallsbewegung
- s_i: Energien einzelner Atome in einem (idealen) Gas

Betrachte zunächst die Einzelverteilung $\underbrace{w_i(s_i)}_{\text{kontinuierlich}}$

Normiertheit: $\int_{-\infty}^{\infty} ds_i \; w_i(s_i) = 1$

$$\langle s_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds_i \; s_i \; w_i(s_i)$$

$$\langle (\Delta s_i)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds_i \left(s_i - \langle s_i \rangle \right)^2 w_i(s_i)$$

ebenso für die höheren Momente $\langle s_i^n \rangle$

Annahme: Alle Momente der s_i existieren:

Statistische Unabhängigkeit der s_i

$\Longrightarrow$

Wahrsch., dass die Einzelvariablen s_i Werte zwischen s_i und $s_i + ds_i$ haben, ist:

$$w_1(s_1)\,ds_1\; w_2(s_2)\,ds_2 \;\dots\; w_N(s_N)\,ds_N$$

Faktorisierung!

Folgerungen

- $$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1\, w_1(s_1) \int_{-\infty}^{\infty} ds_2\, w_2(s_2) \dots \int_{-\infty}^{\infty} ds_N\, w_N(s_N)\, \overbrace{(s_1+s_2+\dots+s_N)}^{X}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1\, s_1\, w_1(s_1)}_{\langle s_1 \rangle}\; \underbrace{\int ds_2\, w_2(s_2)}_{1} \dots \underbrace{\int ds_N\, w_N(s_N)}_{1}$$

$$+ \dots + \underbrace{\int ds_1\, w_1(s_1)}_{1} \cdots \underbrace{\int ds_{N-1}\, w_{N-1}(s_{N-1})}_{1} \cdot \underbrace{\int ds_N\, w_N(s_N)\, s_N}_{\langle s_N \rangle}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \langle s_i \rangle$$

Schwankungen: $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$

beachte:

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle s_i \rangle$$

benutze: $x^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} s_i \right)^2$

$$= \sum_{i=1}^{N} s_i \sum_{j=1}^{N} s_j$$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle s_i s_j \rangle$$

$$\langle (\Delta X)^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \right)$$

benutze nun die statistische Unabhängigkeit der s_i

$$\Rightarrow \langle s_i s_j \rangle = \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \quad \text{falls } i \neq j \text{ !!}$$

(hier ohne Beweis)

$$\Rightarrow \langle (\Delta X)^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N} \left(\langle s_i^2 \rangle - \langle s_i \rangle^2 \right)$$

$$\Rightarrow \langle (\Delta X)^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle (\Delta s_i)^2 \rangle$$

Betrachte nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe $X = s_1 + s_2 + \dots + s_N$ einen bestimmten Wert hat:

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1\, w_1(s_1) \ldots \int_{-\infty}^{\infty} ds_N\, w_N(s_N)\, \delta\left(x - \sum_{i=1}^{N} s_i\right)$$

Integrier $\underbrace{\text{also}}_{}$ über alle Werte von s_i, die zu einem Wert von x führen.

(über "also": gewichtet)

Beachte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, P(x) = 1 \qquad \text{Normiertheit!}$$

weil $\int_{-\infty}^{\infty} dy\, \delta(y-a) = 1$

Auswertung des Ausdrucks für $P(x)$

benutze: $\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikz}$

hier: $z = x - \sum_{i=1}^{N} s_i$

einsetzen:

$$P(x) = \int_{-\infty} ds_1\, w_1(s_1) \ldots \int_{-\infty} ds_N\, w_N(s_N)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx}\, e^{ik(s_1+s_2+\ldots+s_N)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx} \prod_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} ds_j\, w_j(s_j)\, e^{iks_j}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx} \prod_{j=1}^{N} \tilde{w}_j(k)$$

$$\text{mit} \quad \tilde{w}_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_j\, w_j(s_j)\, e^{iks_j}$$

$$= \langle e^{iks_j} \rangle$$

Charakteristische Funktion

der Verteilung $w_j(s_j)$?

Vorgehen:

betrachte $\prod_{j=1}^{N} \hat{w}_j(k)$ für kleine k

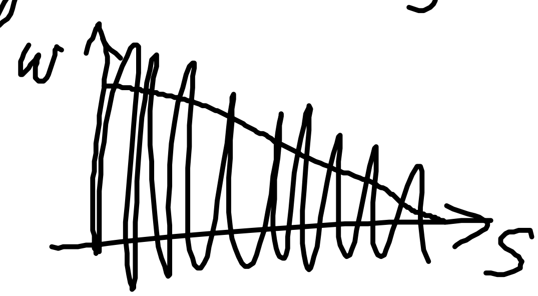
„Begründung":

$\int ds_j \, w_j(s_j) e^{iks_j}$

- große k im Integral

$\Rightarrow$ Phasenfaktor e^{iks} oszilliert schnell

$\Rightarrow$ macht nur kleinen Beitrag zum Integral



- kleine k $\Rightarrow$ Phasenfaktor entspricht ~~kleinen~~ langsamen Oszillation

$\Rightarrow$ Beitrag des Integrals nicht wichtig!

Taylorentwicklungen:

$$\tilde{w}_j(k) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ds_j\, w_j(s_j)\left(1 + iks_j - \frac{1}{2}k^2 s_j^2 + O(k^3)\right)}_{1 + ik\langle s_j\rangle - \frac{1}{2}k^2\langle s_j^2\rangle + \dots}$$

$$\ln \prod_{j=1}^{N} \tilde{w}_j(k) = \sum_{j=1}^{N} \ln \tilde{w}_j(k) = \sum_{j=1}^{N} \ln\left(1 + ik\langle s_j\rangle - \frac{1}{2}k^2\langle s_j^2\rangle + \dots\right)$$

benutze nun:

$$\ln(1+y) \approx y - \frac{y^2}{2} + O(y^3)$$

hier $y = ik \langle s_j\rangle - \frac{1}{2}k^2\langle s_j^2\rangle + \dots$

vernachlässige Terme $O(k^3)$

$$\Rightarrow \ln \prod_{j=1}^{N} \tilde{w}_j(k) = \sum_{j=1}^{N} \left(\underbrace{ik\langle s_j\rangle - \frac{1}{2}k^2\langle s_j^2\rangle}\right.$$

$$-\underbrace{\frac{1}{2}\left(ik\langle s_j\rangle\right)^2}_{\text{aus } \xi_2}\Bigg)$$

$$\Rightarrow \ln \prod_{j=1}^{N} \hat{w}_j(k)$$

$$\approx ik \sum_{j=1}^{N} \langle s_j\rangle$$

$$-\frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^{N} \left(\langle s_j^2\rangle - \langle s_j\rangle^2\right)$$

benutze: $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \langle s_j\rangle = \langle x\rangle$

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\langle s_j^2\rangle - \langle s_j\rangle^2\right) = \langle(\Delta x)^2\rangle .$$

$$\Rightarrow \ln \prod_{j=1}^{N} \hat{w}_j(k)$$

$$\approx ik\langle x\rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle(\Delta x)^2\rangle$$

$$\prod_{j=1}^{N} \hat{W}_j(k) \approx e^{ik\langle x\rangle - \frac{k^2}{2}\langle(\Delta x)^2\rangle} \;!$$

→ wir sind damit die Einzelvariablen s_i endgültig losgeworden!!

Einsetzen in Ausdruck für $P(x)$

$$P(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \; e^{-ikx} \, e^{ik\langle x\rangle - \frac{k^2}{2}\langle(\Delta x)^2\rangle}$$

mathematisch: Fouriertransformation einer Gaussfunktion!

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \; e^{-ik(x-\langle x\rangle) - \frac{k^2}{2}\langle(\Delta x)^2\rangle}$$

benutze: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dy \, e^{-\alpha y^2 + \beta y} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\beta^2/4\alpha}$

$$\rightarrow \boxed{P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{\langle(\Delta x)^2\rangle}}}$$

Gaussverteilung!

Dies gilt, obwohl wir keine spezielle Annahmen über die Einzelverteilungen $w_i(s_i)$ gemacht haben!

Wir haben lediglich angenommen:
- Momente existieren
- statist. Unabhängigkeit