

$$W_N(N_1) = p_1^{N_1} p_2^{N_2} \frac{N!}{N_1! N_2!}$$

Binomialverteilung

$$\binom{N}{N_1}$$

$$\langle N_1 \rangle = p_1 N, \quad \langle (\Delta N_1)^2 \rangle = N p_1 p_2$$

$$\begin{cases} p_2 = 1 - p_1 \\ N_2 = N - N_1 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle}}{\langle N_1 \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

relative Schwankung

große N : Entwickle $\ln W_N(N_1)$
für große N um
den Mittelwert $\langle N_1 \rangle$

$$\ln W_N(N_1) = \ln W_N(\langle N_1 \rangle) + \frac{d \ln W_N(N_1)}{d N_1} (N_1 - \langle N_1 \rangle)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln W_N(N_1)}{dN_1^2} \bigg|_{\langle N_1 \rangle} (N_1 - \langle N_1 \rangle)^2 + \mathcal{O}((N_1 - \langle N_1 \rangle)^3)$$

mit $\frac{d^2 \ln W_N(N_1)}{dN_1^2} \bigg|_{\langle N_1 \rangle}$

$$= -\frac{1}{N p_1 p_2} = -\frac{1}{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle} < 0$$

Einsetzen in die Entwicklung, ~~hier~~ vernachlässige Terme ab dem kubischen Term

$$\Rightarrow \ln W_N(N_1) \approx \underbrace{\ln W_N(\langle N_1 \rangle)}_{\ln \tilde{W}_N(N_1)} - \frac{1}{2} \frac{(N_1 - \langle N_1 \rangle)^2}{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle}$$

$$\tilde{W}_N(N_1) = W_N(\langle N_1 \rangle) e^{-\frac{1}{2} \frac{(N_1 - \langle N_1 \rangle)^2}{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle}}$$

↳ beschreibt Verteilung direkt am Maximum

Normierung von $\hat{W}_N(N_1)$

$$\sum_{N_1=0}^N \hat{W}_N(N_1) \stackrel{!}{=} 1$$

Normierung des diskreten Verteilung

approximiere Summe durch Integral

(o.k. für große N und damit große N_1)

$$\int_0^N dx \underbrace{\hat{W}_N(x)}_{\text{Wahrscheinlichkeitsdichte}} = 1$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\hat{W}_N(x)}_{A e^{-\frac{(x - \langle N_1 \rangle)^2}{2 \langle \Delta N_1 \rangle^2}}} \stackrel{!}{=} 1$$

Gauss-Integral

↖ Faktor, der jetzt festzulegen ist

benutz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx A e^{-\frac{(x-\langle N_1 \rangle)^2}{2(\Delta N_1)^2}}$$

$$= A \cdot \sqrt{2\pi} \sqrt{(\Delta N_1)^2} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{(\Delta N_1)^2}}$$

Ergebnis

$$\hat{W}_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{(\Delta N_1)^2}} e^{-\frac{(x-\langle N_1 \rangle)^2}{2(\Delta N_1)^2}}$$

normiert
Gaußverteilung!

Erinnerung:

Die Voraussetzung für unsere Näherung von

$N_1 \gg 1$, soll gleich auch am Maximum
 $\langle n_1 \rangle = N p_1$ gelten
 $\Rightarrow N \gg 1$

I.3. Zentraler Grenzwertsatz

Gegeben sei nun eine Summe von

Zufallsgrößen s_i ($i=1, \dots, N$), welche durch
unabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilungen $w_i(s_i)$
charakterisiert sind

$$X = S_1 + S_2 + \dots + S_N$$

Ziel: Was ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für
 X im Limes großer N ?

Beispiel:

- s_i : Schrittlänge des i -ten Schrittes bei einer Zufallsbewegung
- s_i : Energien einzelner Atome in einem (idealen) Gas

Betrachte zunächst die Energieverteilung $w_i(s_i)$
kontinuierlich

$$\text{Normierung: } \int_{-\infty}^{\infty} ds_i w_i(s_i) = 1$$

$$\langle s_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds_i s_i w_i(s_i)$$

$$\langle (s_i)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds_i (s_i - \langle s_i \rangle)^2 w_i(s_i)$$

ebenso für die höheren Momente $\langle s_i^n \rangle$

Annahme: Alle Momente der s_i existieren:

Statische Unabhängigkeit der S_i



Wahrsch., dass die Einzelvariablen S_i Werte zwischen S_i und $S_i + ds_i$ haben, ist.

$$w_1(s_1) ds_1 w_2(s_2) ds_2 \dots w_N(s_N) ds_N$$

Faktorisierung!

Folgerung

$$\bullet \langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 w_1(s_1) \int_{-\infty}^{\infty} ds_2 w_2(s_2) \dots \int_{-\infty}^{\infty} ds_N w_N(s_N) \overbrace{(s_1 s_2 \dots s_N)}^X$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 s_1 w_1(s_1)}_{\langle s_1 \rangle} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ds_2 w_2(s_2)}_1 \dots \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ds_N w_N(s_N)}_1$$

$$+ \dots + \underbrace{\int ds_1 w_1(s_1)}_{\uparrow} \dots \underbrace{\int ds_{N-1} w_{N-1}(s_{N-1})}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\int ds_N w_N(s_N)}_{\uparrow} s_N$$

$$= \sum_{i=1}^N \langle s_i \rangle$$

Schwankungen: $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$

beachte:

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

benutze: $x^2 = \left(\sum_{i=1}^N s_i \right)^2$

$$= \sum_{i=1}^N s_i \sum_{j=1}^N s_j$$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle s_i s_j \rangle$$

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^N \langle s_i \rangle$$

$$\langle (\Delta X)^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle)$$

benutze nun die statistische Unabhängigkeit der S_i

$$\Rightarrow \langle S_i S_j \rangle = \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle \quad \text{falls } i \neq j \text{!}$$

(hier ohne Beweis)

$$\Rightarrow \langle (\Delta X)^2 \rangle = \sum_{i=1}^N (\langle S_i^2 \rangle - \langle S_i \rangle^2)$$

$$\Rightarrow \langle (\Delta X)^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle (\Delta S_i)^2 \rangle$$

Betrachte nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe $X = S_1 + S_2 + \dots + S_N$ einen bestimmten Wert hat:

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 u_1(s_1) \dots \int_{-\infty}^{\infty} ds_N u_N(s_N) \delta(x - \sum_{i=1}^N s_i)$$

genügt
 Integrier also über alle Werte von s_i , die zu einem Wert von x führen.

Beachte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx P(x) = 1$$

Normiertheit!

$$\text{weil } \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y-a) = 1$$

Auswertung des Ausdrucks für $P(x)$

benutze: $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikz}$

hier: $z = x - \sum_{i=1}^N s_i$

einsetzen:

$\int_{-\infty}^{\infty}$

$\int_{-\infty}^{\infty}$

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 w_1(s_1) \dots \int_{-\infty}^{\infty} ds_N w_N(s_N) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} e^{ik(s_1 + s_2 + \dots + s_N)} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} ds_j w_j(s_j) e^{iks_j} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \prod_{j=1}^N \tilde{w}_j(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{mit } \tilde{w}_j(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} ds_j w_j(s_j) e^{iks_j} \\
 &= \langle e^{iks_j} \rangle
 \end{aligned}$$

Charakteristische Funktion

der Verteilung $w_j(s_j)$?

Vorgehen:

betrachte $\prod_{j=1}^N \hat{w}_j(k)$ für kleine k

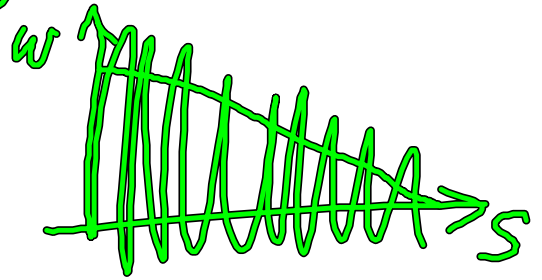
„Begründung“:

$$\int ds_j w_j(s_j) e^{i k s_j}$$

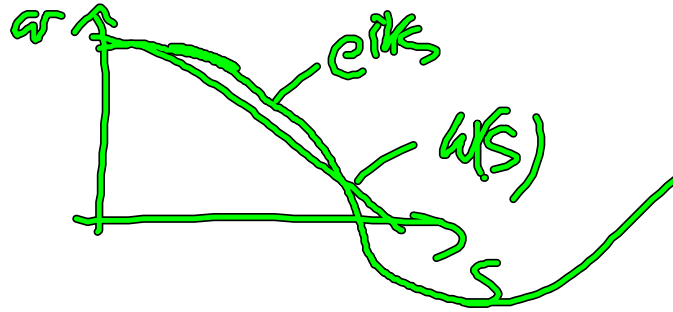
- große k im Integral

→ Phasenfakta $e^{i k s}$ oszilliert schnell

→ macht nur kleinen Beitrag
zum Integral



- kleine k → Phasenfakta entspricht ~~kleinem~~
langsamem Oszillieren



⇒ Beitrag des Integrals wird wichtig!

Taylorentwicklung:

$$1 + ik\langle s_j \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s_j^2 \rangle + \dots$$

$$\tilde{w}_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_j w_j(s_j) \left(1 + ik\langle s_j \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s_j^2 \rangle + \dots \right)$$

$$\ln \prod_{j=1}^N \tilde{w}_j(k) = \sum_{j=1}^N \ln \tilde{w}_j(k) = \sum_{j=1}^N \ln \left(1 + ik\langle s_j \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s_j^2 \rangle + \dots \right)$$

benutze nun:

$$\ln(1 + \gamma) \approx \gamma - \frac{\gamma^2}{2} + O(\gamma^3)$$

$$\text{hier } \gamma = ik\langle s_j \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s_j^2 \rangle + \dots$$

vernachlässige Terme $O(k^3)$

$$\Rightarrow \ln \prod_{j=1}^N \tilde{w}_j(k) = \sum_{j=1}^N \left(ik\langle s_j \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s_j^2 \rangle \right)$$

$$-\frac{1}{2} (i k \langle S_j \rangle)^2$$

~~aus~~ $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \ln \prod_{j=1}^N \hat{W}_j(k)$$

$$\approx i k \sum_{j=1}^N \langle S_j \rangle$$

$$-\frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^N (\langle S_j^2 \rangle - \langle S_j \rangle^2)$$

benutze: $\sum_{j=1}^N \langle S_j \rangle = \langle X \rangle$

$$\sum_{j=1}^N (\langle S_j^2 \rangle - \langle S_j \rangle^2) = \langle (\Delta X)^2 \rangle.$$

$$\Rightarrow \ln \prod_{j=1}^N \hat{W}_j(k)$$

$$\approx i k \langle X \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle (\Delta X)^2 \rangle$$

$$\prod_{j=1}^N \tilde{W}_j(k) \approx e^{ik\langle x \rangle - \frac{k^2}{2} \langle (\Delta x)^2 \rangle} !$$

→ wir sind damit die Einzelvariablen
 s; endgültig losgeworden !!

Einsetzen in Ausdruck für $P(x)$

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} e^{ik\langle x \rangle - \frac{k^2}{2} \langle (\Delta x)^2 \rangle}$$

mathematisch: Fouriertransformation
 einer Gaußschen Wk! (Wahrscheinlichkeit)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x - \langle x \rangle) - \frac{k^2}{2} \langle (\Delta x)^2 \rangle}$$

benutze: $\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha y^2 + \beta y} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\beta^2/4\alpha}$

$$\rightarrow P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{\langle \Delta x^2 \rangle}}$$

Gaussverteilung!

Dies gilt, obwohl wir keine spezielle Annahmen über die Einzelverteilungen $w_j(s_j)$ gemacht haben!

Wir haben lediglich angenommen:

- Momente existieren
- Stat. Unabhängigkeit