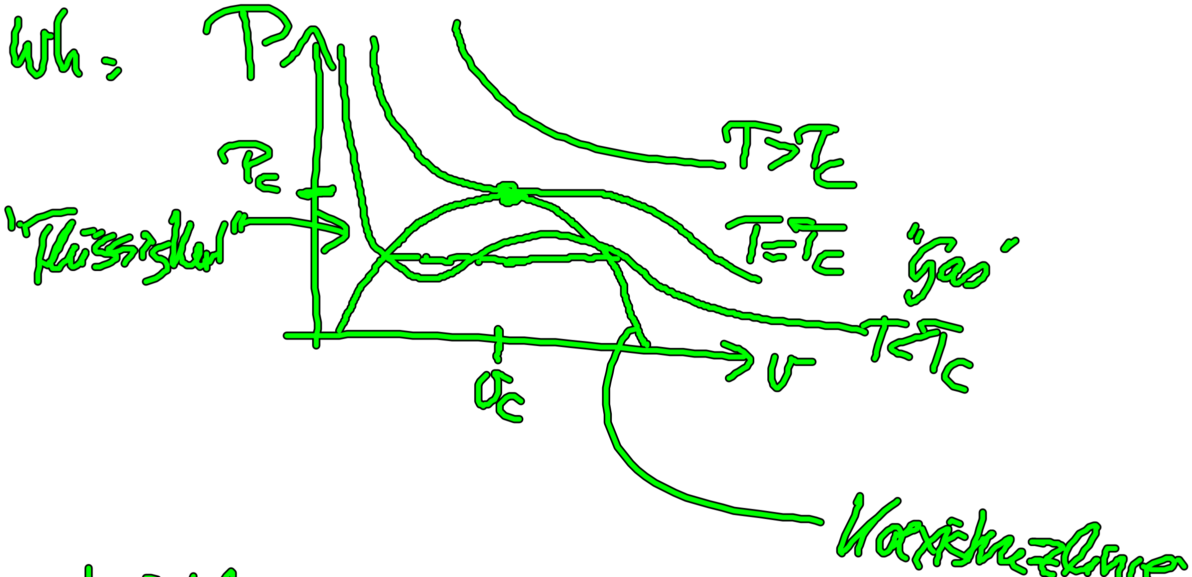
Wh.:



entwickle die vdW-Zustandsgleichung um den kritischen Punkt

$$\frac{(v_g - v_{fl})}{v_c} \sim \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^{\beta} \qquad T<T_c$$

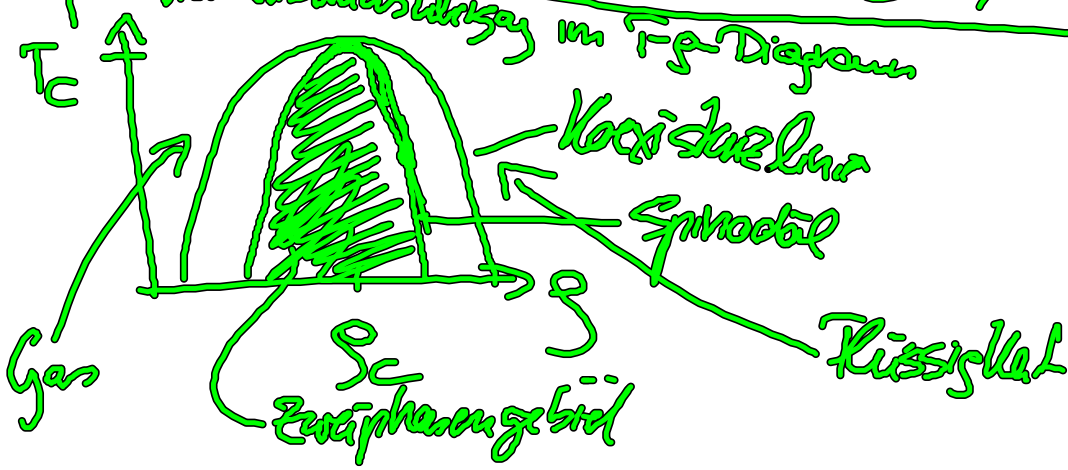
mit

$$\beta = \frac{1}{2}$$

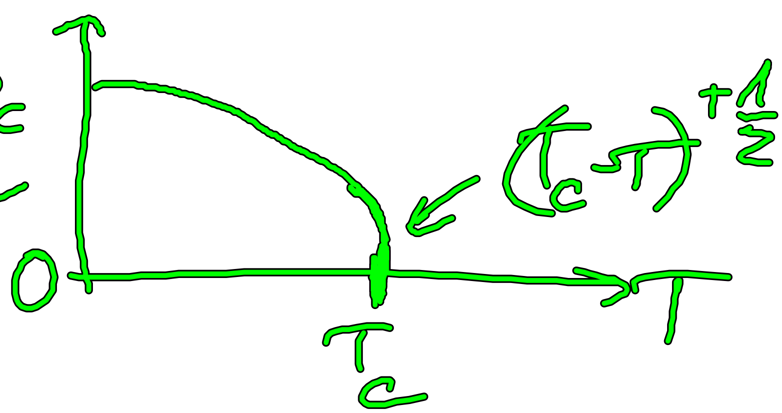
Derselbe Exponent ergibt sich, wenn man statt $v = \frac{V}{N}$ die Dichte betrachtet. $\rho = \frac{1}{v} = \frac{N}{V}$

also $\frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_c} \sim \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^{\beta}$ mit $\beta = \frac{1}{2}$

Kondensationsübergang im T-ρ-Diagramm

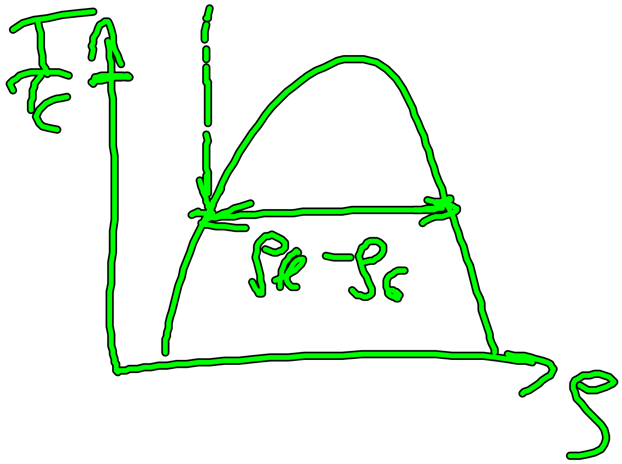


$\underbrace{\rho_l - \rho_c}$



„Ordnungsparameter" des Kondensationsübergangs

- ist Null in der Hochtemperaturphase (ungeordneten Phase)
- ist ungleich Null für tiefe Temperaturen

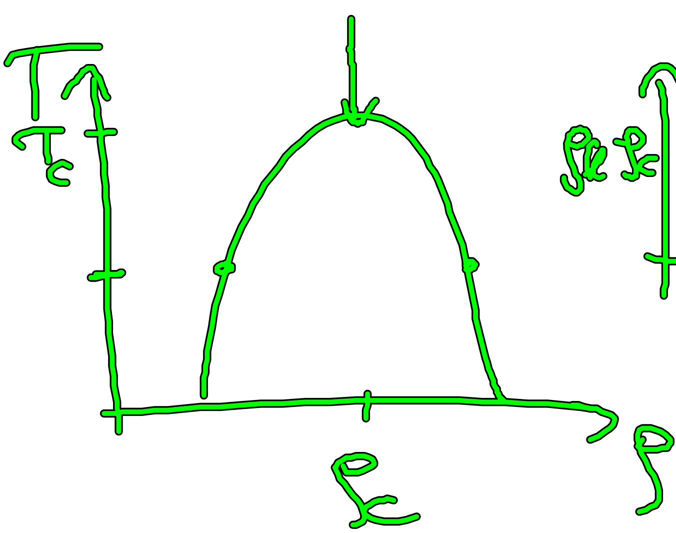


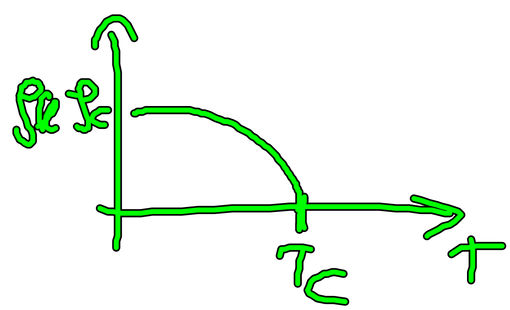
Bei einem solchen Abkühlvorgang würde sich das System in 2 Phasen mit unterschiedl. ρ's aufspalten

$$\Delta\rho = \rho_{Fl} - \rho_G \neq 0$$

$\Longrightarrow$ Phasenübergang 1. Ordnung

(allg: unstetige Änderung eines Ordnungsparameters)





$\longrightarrow$ stetige Änderung des Ordnungsparameters (OP)

„Phasenübergang 2. Ordnung"

beachte: • Hier zeigt nicht nur der OP, sondern auch andere Größen Potenzgesetzverhalten!
• Es gibt divergierende Fluktuationen Korrelationen

vdW-Theorie

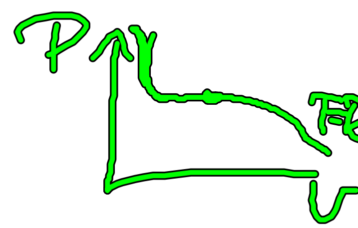
• Kompressibilität

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} \xrightarrow[N=\text{const}]{v=\frac{V}{N}} \kappa_T = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial P}$$

man findet $(T>T_c)$

$$\kappa_T \sim (T-T_c)^{-\gamma} \qquad \text{mit } \gamma = 1$$

$$= \frac{1}{(T-T_c)^{\gamma}}$$



allgemeine Definition kritische Exponenten

Setze $\varepsilon = \frac{T - T_c}{T_c}$

Physikalische Größe

Kritischer Exponent $\quad \varphi = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \xrightarrow{>} 0 \\ T > T_c}} \left(\frac{\ln |F(\varepsilon)|}{\ln |\varepsilon|} \right) \quad (*)$

$\left(\varepsilon \xrightarrow{<} 0 \atop T < T_c \right)$

Bemerkung

1) $F(\varepsilon) = \varepsilon^{\tilde{\varphi}}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \varphi = \tilde{\varphi}$

die allg. Formulierung schließt „logarithmische Divergenzen" mit ein

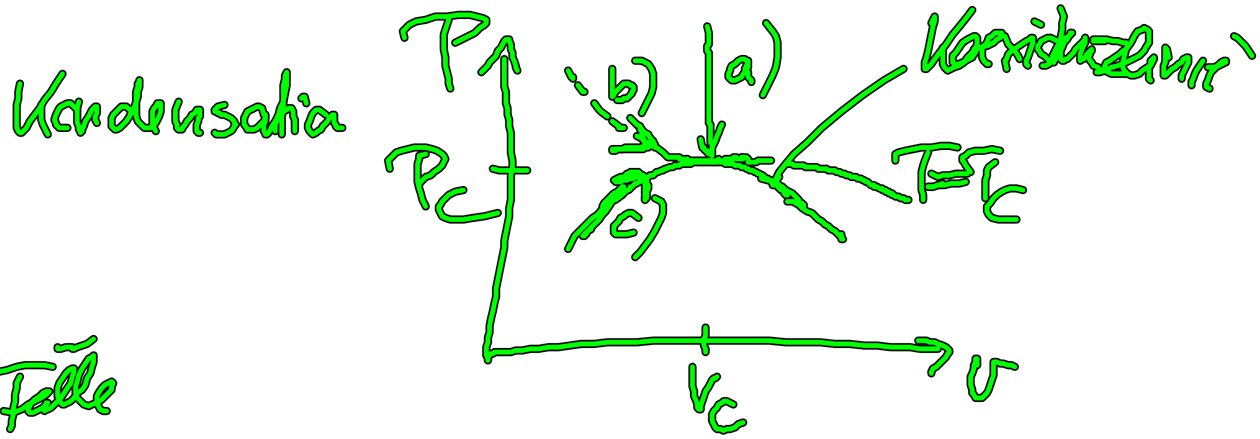
$F(\varepsilon) = \ln \varepsilon$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(\ln \varepsilon)}{\ln \varepsilon} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d(\ln(\overbrace{\ln \varepsilon}^{x}))}{d(\underbrace{\ln \varepsilon}_{x})}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} = 0$$

$\Longrightarrow \varphi = 0$

(ii) Häufig hängen die Exponenten einer bestimmten Größe vom thermodyn. Pfad ab



3 Fälle

a) $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$, $v = v_c$

b) $T = T_c$, $v \xrightarrow{\lessgtr} v_c$

c) $\varepsilon \xrightarrow{<} 0$

$v = v^{coex}_{g(fl)}$

(iii) Häufig vorkommende Bezeichnungen

- **Exponent β**

  ($\rightarrow$ Ordnungsparameter)

Kondensation : $(\rho_{fl} - \rho_c) \sim (-\varepsilon)^{\beta}$

Ferromagnetismus $\begin{pmatrix}\varepsilon < 0 \\ T < T\end{pmatrix}$

OP: Magnetisierung $\underline{M} = M\,\hat{e}_z$ $\qquad M \sim (-\varepsilon)^{\beta}$

- Exponent γ

  ($\to$ relevante Suszeptibilität

  $\to$ Kompressibilität (Kondensation) $\qquad K_T \sim \varepsilon^{-\gamma}$ $\quad \begin{pmatrix} v = v_c \\ \varepsilon > 0 \end{pmatrix}$

  ebenso im Magneten!

  (magnet. Suszeptibilität)

- Exponent ν

  $\to$ Korrelationslänge (ξ)

Betrachte die räuml. Korrelation

Funktion des Ordnungsparameters!

z.B. Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion

$$G(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \sim \left[\langle \hat{\rho}(\underline{r}_1) \hat{\rho}(\underline{r}_2) \rangle - \langle \hat{\rho}(\underline{r}_1) \rangle \langle \hat{\rho}(\underline{r}_2) \rangle \right]$$

$$= \left[\langle \hat{\rho}(\underline{r}_1) \hat{\rho}(\underline{r}_2) \rangle - \rho^2 \right]$$

mikroskop.

$$\hat{\rho}(\underline{r}_1) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\underline{r}_1 - \underline{R}_i)$$

$$\langle \hat{\rho}(\underline{r}_1) \rangle = \text{const.} = \rho_m$$

homogenes System

in magnet. Systemen

$$G(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \sim \left[\langle \underline{S}(\underline{r}_1) \cdot \underline{S}(\underline{r}_2) \rangle - \langle \underline{S}(\underline{r}_1) \rangle \langle \underline{S}(\underline{r}_2) \rangle \right]$$

mikroskop. Magnetisierung

In der Nähe eines kritischen Punktes haben diese räuml. Korrelationsfunktion folgende Gestalt:
(Ornstein-Zernike-Theorie)

$$g(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \sim \frac{1}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^{d-2+\eta}} e^{-\frac{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}{\xi}} \quad (**)$$

d : Raumdimension
η : Korrektur

mit ξ : Korrelationslänge

Die Korrelationslänge ξ divergiert

$$\xi \sim \varepsilon^{-\nu} = \frac{1}{\varepsilon^{\nu}} \quad (\varepsilon \xrightarrow{>} 0) \quad T > T_c$$

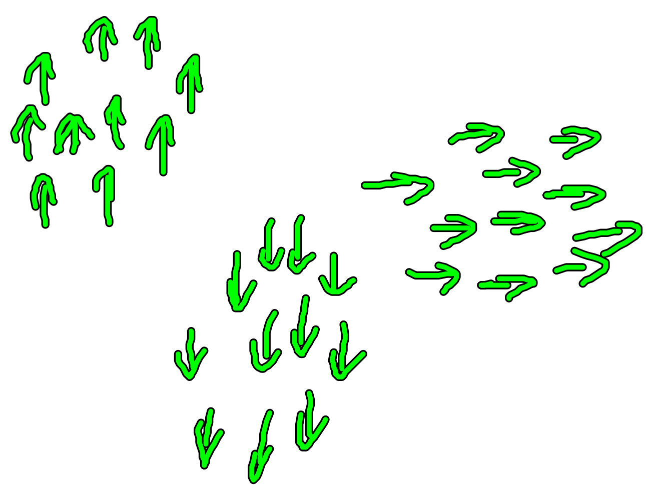
betrachte (**) mit $\xi \to \infty$

$$G(\underline{r}_1,\underline{r}_2) \sim \frac{1}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|^{d-2+\eta}}$$

man sagt:

Korrelationen werden **langreichweitig** !

z.B. Ferromagnet bei $T \gtrsim T_c$



beachte: $\chi_T \sim \int dr_{12}\, G(\underline{r}_1,\underline{r}_2)$

$T \to T_c$

wir wissen bereits $\chi_T \to \infty$

$$g(\underline{r}_1,\underline{r}_2) \sim \frac{1}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|^{3-2+\eta}} \quad \text{in 3D}$$

$$\eta \approx 0.03$$

$$\int d\underline{r}_{12}\; g(\underline{r}_1,\underline{r}_2) = 4\pi \int_0^\infty dr_{12}\, \frac{r_{12}^2 \frac{1}{r_{12}}}{r_{12}}$$

$$\longrightarrow \infty$$

Universalitätshypothese

(Griffiths, 1970)

Kritische Exponenten hängen nur ab von

- Raumdimension (d)
- Dimension des Ordnungsparameters (n)

$n = 1$ (scalarer OP)

z.B. Kondensation (OP: $\Delta\rho$)

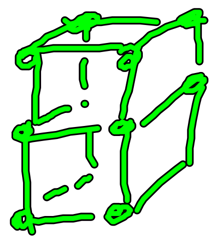
$\uparrow\downarrow$ Ising-Modell (Magnetisierung kann nur „rauf" oder „runter" sein)

Konzentration in einem binären System

$\underline{n=3}$

- Polarisation $\underline{P}$ eines Ferroelektrikums

- Magnetisierung $\underline{M}$ eines magnet. Festkörpers ohne starke Kristallanisotropie (Heisenberg-Modell)



- <u>Reichweite</u> der Wechselwirkung

sei $f(r)$ abstandsabhängiges Wechselwirkungspotential

$$f(r) \sim \frac{1}{r^{d+2+x}}$$

$x > 0$: "kurzreichweitige Wechselwirkung"

$x < \frac{d}{2} - 2$: "langreichweitig"

Fazit:

~~[illegible]~~

Die genaue Form der mikroskop. Wechselwirkung spielt keine Rolle!

$\longrightarrow$ Kondensierendes Gas und Ising-Magnet haben dieselben kritischen Exponenten!

z.B. $n = 1$

Werte für krit. Exponenten

Ordnungsparameter:

$$m \sim \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^{\beta}$$

$(T < T_c)$

vdW-Theorie

$\beta = \frac{1}{2}$ $(n=1)$

Ising $(d=2)$

$\beta \approx 0.125$

Ising $(d=3)$

$\beta \approx 0.325$

Heisenberg $(d=3)$ $\beta \approx 0.365$