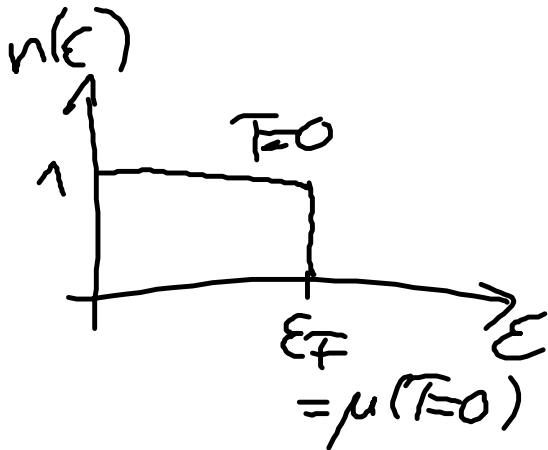


Wh: Fermion bei $T=0$

$$\langle n_{\alpha} \rangle^{FD} \rightarrow \langle n(\epsilon) \rangle$$

$$\begin{aligned} &= n(\epsilon) \quad \epsilon = \frac{p^2}{2m} \\ &\stackrel{T=0}{=} N(\epsilon_F - \epsilon) \\ &= N(\epsilon_F - \epsilon) \end{aligned}$$



$$\Rightarrow E|_{T=0} = \frac{3}{5} \epsilon_F N \quad \text{Gesamtenergie}$$

$$\text{Nullpunktenergie} : P|_{T=0} = \frac{2}{5} \epsilon_F^2 \neq 0$$

Anwendungen:

- Leitungselektronen in Metalle

(Bild:
positiv geladene Ionenrümpfe,
frei Valenzelektronen)

ϵ_F hat Größenordnung von einigen eV

$$\Rightarrow T_F = : \frac{E_F}{k_B} \quad \text{Größenordnung von } 10^4 \text{ K}$$

Fermi-Temperatur
Entartungstemperatur

$\gg 300 \text{ K}$
(Zimmertemperatur)

\Rightarrow bei 300 K sind die Elektronen im wesentl. im Grundzustand

• 'Weiße Zwerge'

große Sterne (bis zum 1.5-fachen der Sonnenmasse)

im Endstadium

\Rightarrow bestehen aus ionisierten Kernen (Helium) und Elektronen

$$\rightarrow E_F \sim 10^5 \text{ eV}$$

$$\rightarrow T_F \sim 10^{11}$$

$$\boxed{E_F \sim S^{2/3}}$$

$$\Rightarrow P|_{T=0} = \frac{2}{5} E_F S \quad \text{mög.}$$

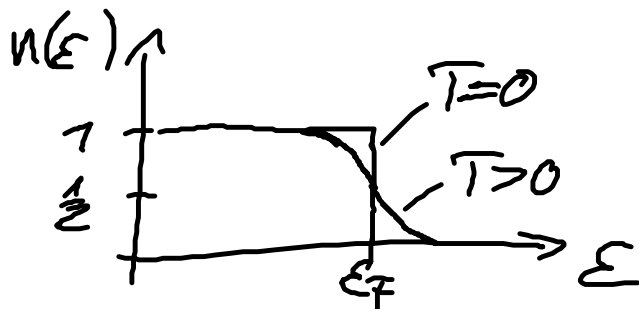
Nullpunktdruck
entscheidend für die
Stabilität des Sterns
(gegen Gravitationsanzug)

VII.7. Fest entartetes Fermi-Gas

(Sommerfeld-Entwicklung)

betrachte kleine Temperatur T

$$\left(\beta \mu = \frac{\mu}{k_B T} \gg 0 \right)$$



Aufweitungszone über Bereich $\sim k_B T$
(um $\epsilon_F = \mu(T=0)$)

untersuche thermodyn. Größen für Elektronensystem ^{S=1/2}
($2s+1=2$)

$$\langle E \rangle = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int dp \frac{p^2}{2m} n\left(\frac{p^2}{2m}\right)$$

Wechsel der Integrationsvariable

$$p \rightarrow \epsilon = \frac{p^2}{2m}$$

$$= \dots = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{1/2} \varepsilon n(\varepsilon)$$

definiere Zustandsdichte

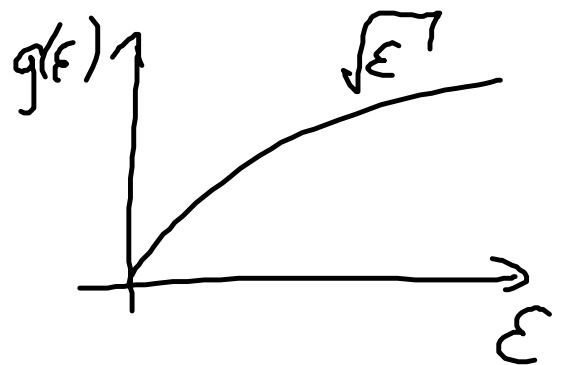
$$g(\varepsilon) = 0, \quad \varepsilon < 0$$

$$g(\varepsilon) = 2 \frac{V}{4\pi^2} 2 \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} = \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_F}}$$

$g(\varepsilon) d\varepsilon$:

Zahl der Einpartikenzustände
im Energieintervall $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$

(Abhängigkeit $\sim \varepsilon^{1/2}$
relativität nicht-relativist.)
(Charakter, $\varepsilon \sim p_{\text{Zun}}^2$)



$$\Rightarrow \langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) \varepsilon n(\varepsilon)$$

$$\langle N \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon)$$

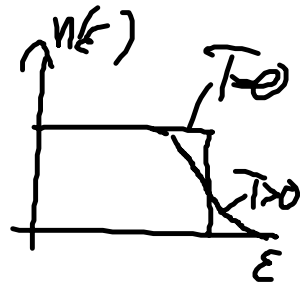
Ziel:

Auswertung von Integralen der Form

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon F(\varepsilon) n(\varepsilon)$$

für kleine T

→ Sommerfeld-Entwicklung



Setze $F(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} H(\varepsilon) \Leftrightarrow H(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} d\varepsilon' F(\varepsilon')$

Annahmen:

- $F(\varepsilon) \rightarrow 0$, für $\varepsilon \rightarrow -\infty$
- $F(\varepsilon)$ wächst nicht schneller als Potenzen von ε für $\varepsilon \rightarrow \infty$

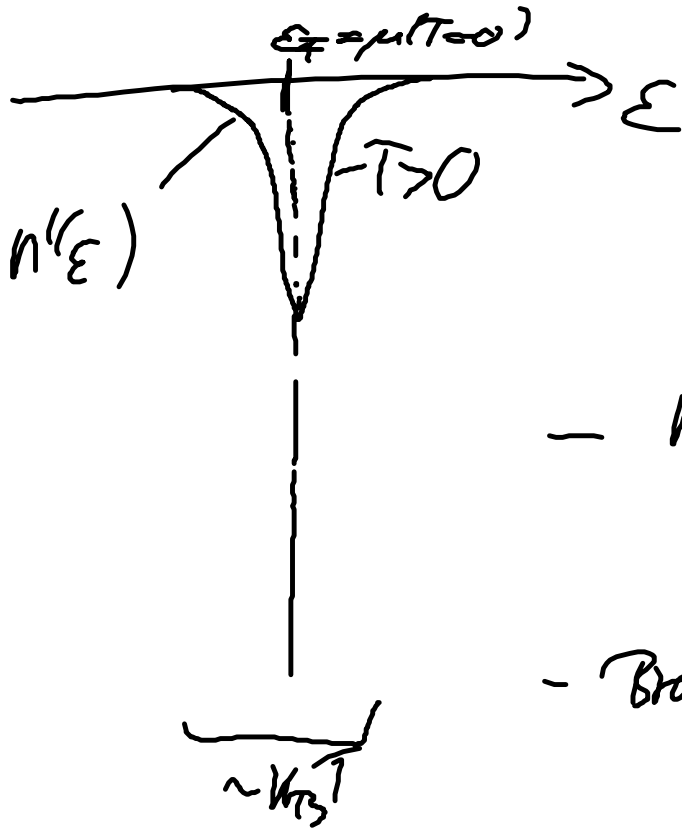
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} H(\varepsilon) n(\varepsilon)$$

$$= \cancel{\left[H(\varepsilon) n(\varepsilon) \right]_{-\infty}^{\infty}} - \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon H(\varepsilon) \underbrace{\frac{d}{d\varepsilon} n(\varepsilon)}_{n'(\varepsilon)}$$

Null

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon H(\varepsilon) n'(\varepsilon)$$

$$n(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \Rightarrow n'(\epsilon) = -\beta \frac{e^{\beta(\epsilon - \mu)}}{(e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1)^2}$$



- $n'(\epsilon)$ ist gerade
in $x = \beta(\epsilon - \mu)$

- Breite $\sim v_F T$

$\sim v_F T$

$\Rightarrow n'(\epsilon)$ ist in einem kleinen Bereich um $\epsilon =$
von Null verschieden!

Strategie:

Entwickle in
$$I = - \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon H(\epsilon) n'(\epsilon)$$

die Funktion $H(\epsilon)$ um $\epsilon = \mu$

Beachte: Wg. Symmetrie von $n'(\epsilon)$ bez. μ
tauchen nur gerade Potenzen von $\epsilon - \mu$
auf!

$$I = - \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{2n}}{d\epsilon^{2n}} \overbrace{H(\epsilon)}^{H(\mu)} \Big|_{\epsilon=\mu} \frac{(\epsilon-\mu)^{2n}}{(2n)!} n'(\epsilon)$$

$$I = - H(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon n'(\epsilon)$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left(\sum_{n=1}^{\infty} H^{(2n)}(\mu) \frac{(\epsilon-\mu)^{2n}}{(2n)!} n'(\epsilon) \right)$$

beachte: $\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon n'(\epsilon) = [n(\epsilon)]_{-\infty}^{\infty} = 0 - 1 = -1$

$$H(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} d\epsilon f(\epsilon)$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon \bar{F}(\varepsilon) \quad \text{nullte-Ordnung}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \bar{F}^{(2n-1)}(\mu) \frac{(\varepsilon-\mu)^{2n}}{(2n)!} (-n'(\varepsilon))$$

Aus der Integration über ε im 2. Term ergibt sich

$$I = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon \bar{F}(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (k_B T)^{2n} \bar{F}^{(2n-1)}(\mu)$$

$$(x = \beta(\varepsilon - \mu)) \quad a_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^{2n}}{(2n)!} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) \right)$$

Bei sehr kleinen T genügt es,
bis zur 1. Ordnung zu gehen

$$a_1 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\rightarrow I \approx \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon F(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\mu}$$

VII.8 Anwendung des Sommerfeld-Entwicklungs, spezif. Wärme des Fermigas

mittlere Teilchenzahl:

$$\langle N \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon)$$

$$\text{mit } F(\varepsilon) = g(\varepsilon)$$

$$\rightarrow N = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon g(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{dg(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\mu} + O(T^4)$$

$$g(\varepsilon) = \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F^{3/2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow g'(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=\mu} = \frac{3}{4} \frac{N}{\varepsilon_F^{3/2}} \mu^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow N = N \left(\frac{\mu}{\varepsilon_F} \right)^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 N \left(\frac{\mu}{\varepsilon_F} \right)^{3/2} \frac{1}{\mu^2} + O(T^4)$$

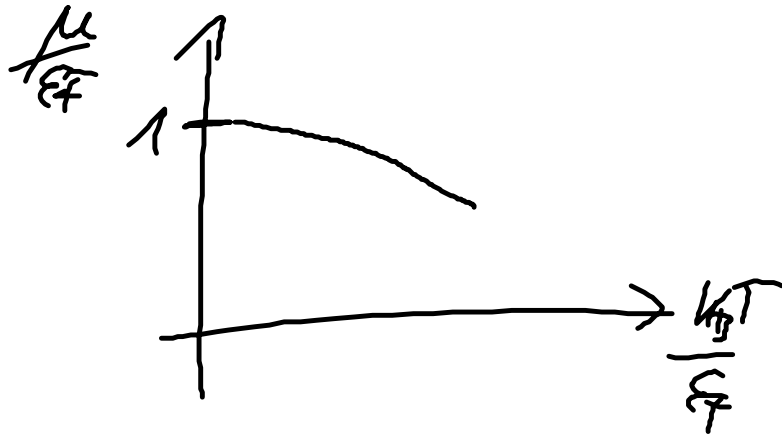
betrachte N als Konstante, die man kürzen kann

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{\mu}{\varepsilon_F} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right)^2 \dots \right)$$

man erhält:

$$\textcircled{*} \mu = \varepsilon_F - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + O(T^4)$$

Chem. Potential
 verringert sich mit
 steigender Temperatur



Mittlere Energie

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) \varepsilon n(\varepsilon) \Rightarrow F(\varepsilon) = g(\varepsilon) \varepsilon$$

mit Sommerfeld-Entwicklung bis
 zur 1. Ordnung

$$\langle E \rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon g(\varepsilon) \varepsilon}_{\frac{3}{5} \frac{N}{\varepsilon_F} \mu^{5/2}} + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \underbrace{\left(g(\mu) + \mu g'(\mu) \right)}_{\frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F} \mu^{1/2} \left(\frac{dg}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\mu} \right)}$$

$\frac{3}{4} \frac{N}{\varepsilon_F} \mu^{3/2}$

Nach Einsetzen von (*)
 für $\mu(T)$ ergibt sich:

$$\langle E \rangle = \frac{E(T=0)}{N} + \underbrace{\frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\epsilon_F} (k_B T)^2}_{\frac{\pi^2}{6} \frac{1}{N} g(\epsilon_F)} + o(T^4)$$

(*)

$$E(T=0) = \frac{3}{5} \epsilon_F N$$

Daraus die spezif. Wärme

$$\tilde{C}_V = \frac{C_V}{N} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\langle E \rangle}{N} \right)$$

Für sehr hohe Temperaturen!

$$\rightarrow \approx k_B \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B T}{\epsilon_F} \approx k_B \frac{\pi^2}{3N} k_B T g(\epsilon_F)$$

$$\tilde{C}_V = k_B \frac{\pi^2}{3N} k_B T g(\epsilon_F) \quad (+ o(T^3))$$

spezifische Wärme des
idealen Fermigas für $T \rightarrow$

Bemerkungen

• \hat{C}_V ist für $T \rightarrow 0$ linear in T

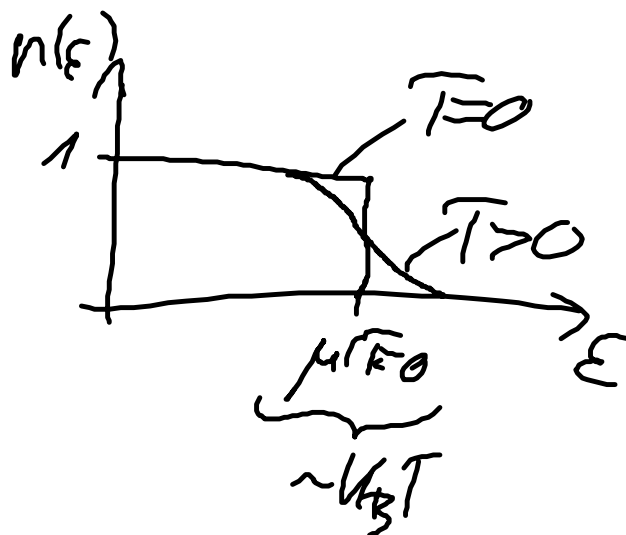
Qualitativ:

Erhöhe Temperatur von $T=0$ auf $T>0$

\Rightarrow Anregung von e^- mit $\epsilon \sim \mu(T=0) - \frac{k_B T}{2}$

... auf $\epsilon \sim \mu(T=0) + \frac{k_B T}{2}$

Zahl der e^-
in der Nähe der
Kant ist



Zustandsdichte \downarrow $g(\epsilon_F)$ \times Breite des Intervalls \downarrow $k_B T$

Jedes dieser e^- (Freiheitsgrade) trägt Anregungsenergie von $k_B T/2$

\Rightarrow Energie wird erhöht um

$$\Delta E = E^{T>0} - E^{T=0}$$

$$\sim (k_B T)^2 g(\epsilon_F)$$

→ C_V ist proportional zu T !

- Vergleich mit dem klass. Resultat ('ideales Gas!')

$$E_{\text{ideal}}^{\text{klass}} = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$\rightarrow \tilde{C}_V = \frac{Q_V}{N} = \frac{3}{2} k_B$$

unabhängig von T !

