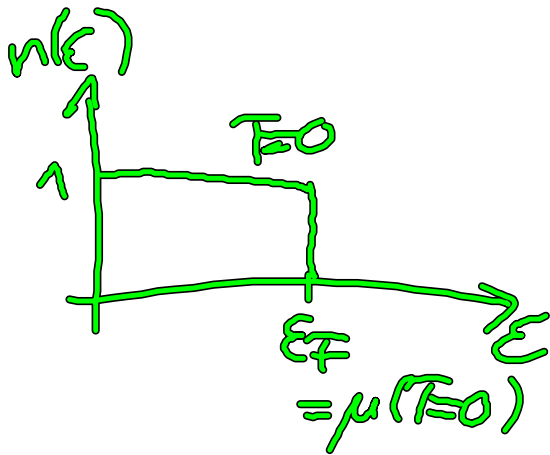


Wk: Fermion bei  $T=0$

$$\langle n_i \rangle^{FD} \rightarrow \langle n(\epsilon) \rangle$$

$$\begin{aligned} &= n(\epsilon) \quad \epsilon = \frac{p^2}{2m} \\ &\stackrel{T=0}{=} N(\epsilon_F - \epsilon) \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \epsilon \Big|_{T=0} = \frac{3}{5} \epsilon_F N \quad \text{Gesamtenergie}$$

$$\text{Nullpunktwärme} : P|_{T=0} = \frac{2}{5} \epsilon_F S \neq 0$$

Anwendungen:

- Leitungsmechanismen in Metalle

(Bild:  
positiv geladene Ionenrümpfe,  
bei Valenzelektronen)

$\epsilon_F$  hat Größenordnung von einigen eV

$$\Rightarrow T_F = : \frac{\epsilon_F}{k_B} \quad \text{Größenordnung von } 10^6 \text{ K}$$

Fermi-Temperatur  
Erhaltungstemperatur

$\gg 300 \text{ K}$   
(Zimmertemperatur)

$\Rightarrow$  bei 300 K sind die Elektronen im Wesentlichen  
gefroren

### • 'Weiße Zwerg'

große Sterne (bis zum 1.5-fachen  
der Sonnenmasse)

im Endstadium

$\Rightarrow$  bestehen aus ionisierten Kernen (Helium)  
und Elektronen

$$\rightarrow \epsilon_F \sim 10^5 \text{ eV}$$

$$\rightarrow T_F \sim 10^6$$

$$\boxed{\epsilon_F \sim \rho^{2/3}}$$

$$\Rightarrow P|_{T=0} = \frac{2}{5} \epsilon_F \rho \quad \text{mög.}$$

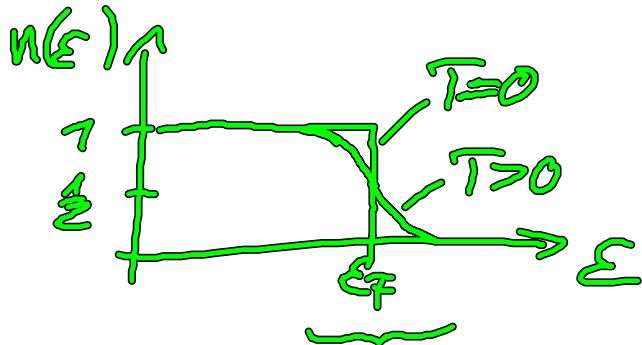
Nullpunktdruck  
entscheidend für die  
Stabilität des Sterns  
(gegen Gravitationsdruck)

# VII.7. Fest entartetes Fermi-Gas

(Sommerfeld-Entwicklung)

betrachte kleine Temperatur  $T$

$$\left( \beta \mu = \frac{\mu}{k_B T} \gg 0 \right)$$



Aufwärmprozess über Bereich  $\sim k_B T$   
(um  $\epsilon_F = \mu(T=0)$ )

untersuche thermodyn. Größen für Elektronensystem <sup>3D</sup>  
( $2s+1=2$ )

$$\langle E \rangle = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{p^2}{2m} n\left(\frac{p^2}{2m}\right)$$

Wechsel der Integrationsvariable

$$p \rightarrow \epsilon = \frac{p^2}{2m}$$

$$= \dots = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{1/2} \varepsilon n(\varepsilon)$$

definiere Zustandsdichte

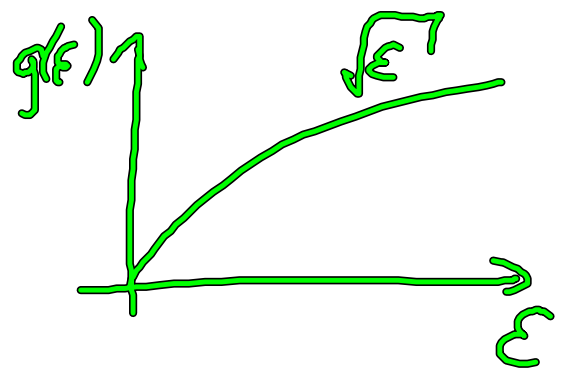
$$g(\varepsilon) = 0, \quad \varepsilon < 0$$

$$g(\varepsilon) = 2 \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} = \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_F}}$$

$g(\varepsilon) d\varepsilon$  :

Zahl der Einpartikenzustände  
im Energieintervall  $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$

(Abhängigkeit  $\sim \varepsilon^{1/2}$   
reflektiert nicht-relativ.  
Charakter,  $\varepsilon \sim p_{\text{Fermi}}^2$ )



$$\Rightarrow \langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) \varepsilon n(\varepsilon)$$

$$\langle N \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon)$$

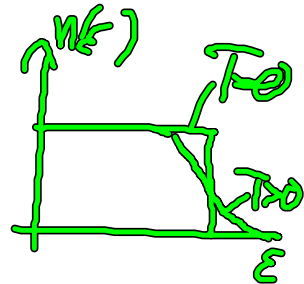
Ziel:

# Auswertung von Integralen der Form

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon F(\varepsilon) n(\varepsilon)$$

für kleine  $T$

→ Sommerfeld-Entwicklung



Setze  $F(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} H(\varepsilon) \Leftrightarrow H(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} d\varepsilon' F(\varepsilon')$

Annahmen:

- $F(\varepsilon) \rightarrow 0$ , für  $\varepsilon \rightarrow -\infty$
- $F(\varepsilon)$  wächst nicht schneller als Potenzen von  $\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow \infty$

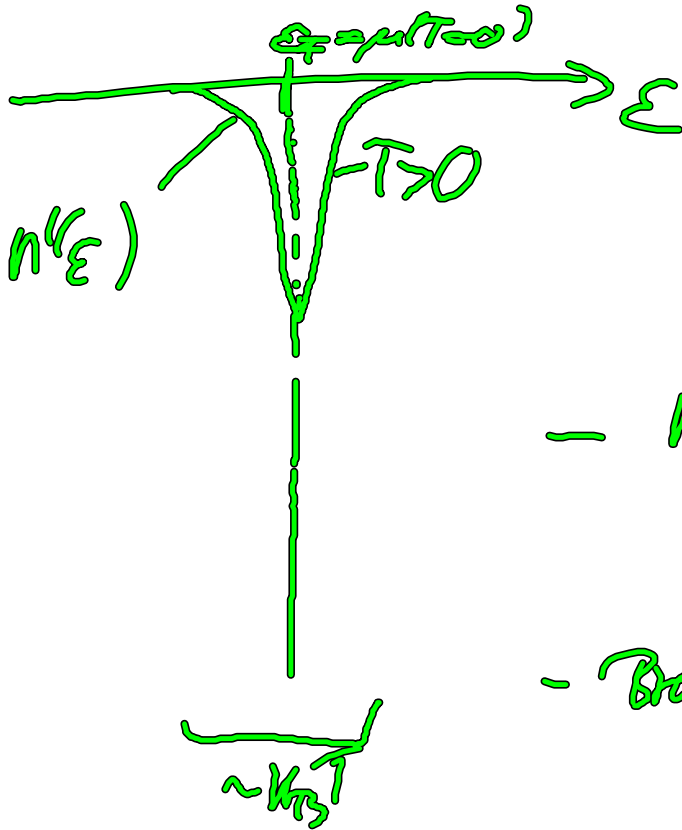
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} H(\varepsilon) n(\varepsilon)$$

$$= \cancel{\left[ H(\varepsilon) n(\varepsilon) \right]_{-\infty}^{\infty}} - \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon H(\varepsilon) \underbrace{\frac{d}{d\varepsilon} n(\varepsilon)}_{n'(\varepsilon)}$$

Null

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon H'(\varepsilon) n'(\varepsilon)$$

$$n(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \Rightarrow n'(\epsilon) = -\beta \frac{e^{\beta(\epsilon-\mu)}}{(e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1)^2}$$



-  $n'(\epsilon)$  ist gerade  
in  $x = \beta(\epsilon - \mu)$

- Breite  $\sim k_B T$

$\Rightarrow n'(\epsilon)$  ist in einem kleinen Bereich um  $\epsilon = \mu$  von Null verschieden!

Strategie:

Entwickle in  $I = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon H(\epsilon) n'(\epsilon)$

die Funktion  $H(\epsilon)$  um  $\epsilon = \mu$

Beachte: Wg. Symmetrie von  $n'(\epsilon)$  betr.  $\mu$   
 tauschen nur gerade Potenzen von  $\epsilon - \mu$   
 auf!

$$I = - \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{2n}}{d\epsilon^{2n}} H(\epsilon) \Big|_{\epsilon=\mu} \frac{(\epsilon-\mu)^{2n}}{(2n)!} n'(\epsilon)$$

$$I = - H(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon n'(\epsilon)$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left( \sum_{n=1}^{\infty} H^{(2n)}(\mu) \frac{(\epsilon-\mu)^{2n}}{(2n)!} n'(\epsilon) \right)$$

beachte:  $\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon n'(\epsilon) = [n(\epsilon)]_{-\infty}^{\infty} = 0 - 1 = -1$

$$H(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} d\epsilon f(\epsilon)$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon \mathcal{F}(\varepsilon) \quad \text{nullte-Ordnung}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \mathcal{F}^{(2n-1)}(\mu) \frac{(\varepsilon-\mu)^{2n}}{(2n)!} (-n'(\varepsilon))$$

Aus der Integration über  $\varepsilon$  im 2. Term ergibt sich

$$I = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon \mathcal{F}(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (k_B T)^{2n} \mathcal{F}^{(2n-1)}(\mu)$$

$$(x = \beta(\varepsilon - \mu)) \quad a_n = \int_0^{\infty} dx \frac{x^{2n}}{(2n)!} \left( -\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{e^{x+\mu}} \right) \right)$$

Bei sehr kleinen  $T$  genügt es,  
bis zur 1. Ordnung zu gehen

$$a_1 = \frac{\pi^2}{6}$$



$$\rightarrow I \approx \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon F(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\mu}$$

## VII.8 Anwendung der Sommerfeld-Entwicklung, spezif. Wärme des Fermigases

mittlere Teilchenzahl:

$$\langle N \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon)$$

$$\text{bzw. } \bar{F}(\varepsilon) = g(\varepsilon)$$

$$\rightarrow N = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon g(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{dg(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\mu} + O(T^4)$$

$$g(\varepsilon) = \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F^{3/2}} \varepsilon^{1/2}$$

$$\Rightarrow g'(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=\mu} = \frac{3}{4} \frac{N}{\varepsilon_F^{3/2}} \mu^{-1/2}$$

$$\Rightarrow N = N \left( \frac{\mu}{\varepsilon_F} \right)^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 N \left( \frac{\mu}{\varepsilon_F} \right)^{3/2} \frac{1}{\mu^2} + o(T^4)$$

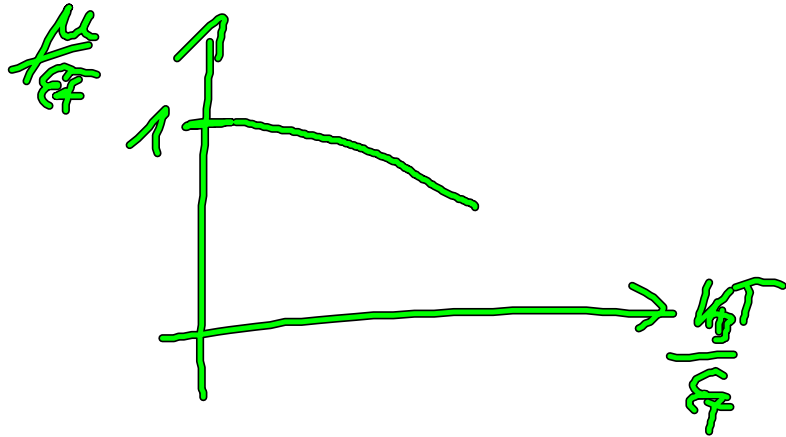
betrachte  $N$  als konstant, die man kürzen kann

$$\Rightarrow 1 = \left( \frac{\mu}{\varepsilon_F} \right)^{3/2} \left( 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^2 \dots \right)$$

man erhält:

$$\textcircled{*} \mu = \varepsilon_F - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + o(T^4)$$

Chem. Potential  
 verringert sich mit  
 steigender Temperatur



Mittlere Energie

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) \varepsilon n(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad F(\varepsilon) = g(\varepsilon) \varepsilon$$

mit Sommerfeld-Entwicklung bis  
 zur 1. Ordnung

$$\langle E \rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon g(\varepsilon) \varepsilon}_{\frac{3}{5} \frac{N}{\varepsilon_F} \mu^{5/2}} + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \underbrace{\left( g(\mu) + \mu g'(\mu) \right)}_{\left( \frac{3}{5} \frac{N}{\varepsilon_F} \mu^{1/2} \right) \left( \frac{dg}{d\varepsilon} / \varepsilon \mu \right)}$$

$\frac{3}{4} \frac{N}{\varepsilon_F} \mu^{3/2}$

Nach Einsetzen von  $\textcircled{2}$   
 für  $\mu(T)$  ergibt sich:

$$\langle E \rangle = \frac{E(T=0)}{N} + \underbrace{\frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\epsilon_F} (k_B T)^2}_{\frac{\pi^2}{6} \frac{1}{N} g(\epsilon_F)} + o(T^4)$$

(\*)

$$E(T=0) = \frac{2}{5} \epsilon_F N$$

Daraus die spezif. Wärme

$$\hat{C}_V = \frac{C_V}{N} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\langle E \rangle}{N} \right)$$

Für sehr hohe Temperaturen!

$$\xrightarrow{(*)} \approx k_B \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B T}{\epsilon_F} \approx k_B \frac{\pi^2}{3N} k_B T g(\epsilon_F)$$

$$\hat{C}_V = k_B \frac{\pi^2}{3N} k_B T g(\epsilon_F) \quad (+o(T^3))$$

spezifische Wärme des  
idealen Fermigas für  $T \rightarrow$

Bemerkungen

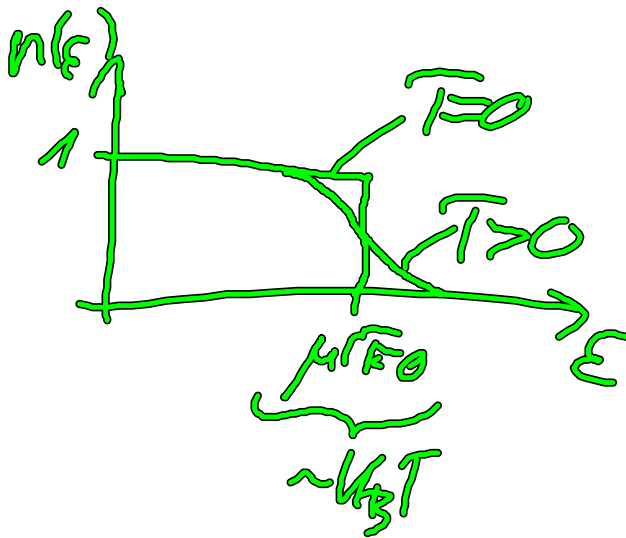
•  $\hat{C}_V$  ist für  $T \rightarrow 0$  linear in  $T$

Qualitativ:

Erhöhe Temperatur von  $T=0$  auf  $T>0$

$\Rightarrow$  Anregung von  $e^-$  mit  $\epsilon \sim \mu(T=0) - \frac{k_B T}{2}$

... auf  $\epsilon \sim \mu(T=0) + \frac{k_B T}{2}$



Zahl der  $e^-$   
in der Nähe der  
Kantk ist

Zustandsdichte  $\downarrow$   $g(\epsilon)$   $\times$  Breite des Intervalls  $\downarrow$   $k_B T$

Jedes dieser  $e^-$  (Freiheitsgrade) trägt Anteilswissen von  $k_B T/2$

$\Rightarrow$  Energie wird erhöht um

$$\Delta E = E^{T \rightarrow 0} - E^{T=0}$$

$$\sim (\frac{1}{2}T)^2 g(\epsilon_F)$$

$\rightarrow C_V$  ist proportional zu T!

- Vergleich mit dem klass. Resultat ('ideales Gas!')

$$E_{\text{ideal}}^{\text{klass}} = \frac{3}{2} N \frac{1}{2} T$$

$$\rightarrow \tilde{C}_V = \frac{Q_V}{N} = \frac{3}{2} \frac{1}{2}$$

unabhängig von T!

