## 1.2 Differentiation

z.B. Ort $x$ $\longrightarrow$ Geschwindigkeit $\dot{x}$ $\longrightarrow$ Beschleunigung $\ddot{x}$

**Ableitung** von $f$ an der Stelle $x$:

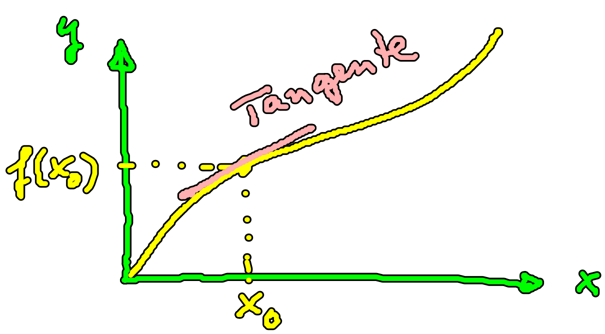
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df}{dx}$$

z.B. $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

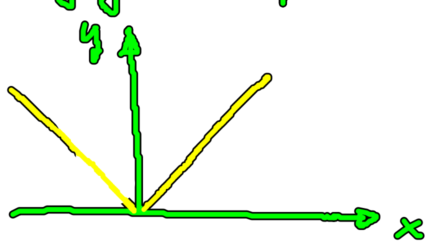
$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

**Def.**: $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x$ differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x)$ existiert.




$f'(x)$ = Steigung der Tangente

Gegenbeispiel:




$f(x) = |x|$
stetig, aber nicht diff.bar
bei $x = 0$

**Ableitungsregeln**: Seien $f(x)$ und $g(x)$ überall diff.bare Funktionen

$(f+g)' = f' + g'$

$(f \cdot g)' = f'g + fg'$ Produktregel

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ Quotientenregel
(Vor. $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$)

Sei $g(f(x)) \equiv (g \circ f)(x)$:

$\left(g(f(x))\right)' = (g' \circ f) f' = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{äußere Fkt.}} \underbrace{f'(x)}_{\text{innere Fkt.}}$ Kettenregel

Folgerung für $g(x) = f^{-1}(x)$:

$f^{-1}(f(x)) = x$ | Andererseits nach Kettenregel:
$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = 1$ | $\left(f^{-1}(f(x))\right)' = (f^{-1})'(\underbrace{f(x)}_{y}) \cdot f'(x) \stackrel{!}{=} 1$

$\Leftrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ Umkehrregel

**Beispiele**: 1) $\frac{d}{dx} a^x = ?$

benutze $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a}$

Kettenregel $(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$

äußere Fkt. $e^y$ mit $y = x \ln a$
innere Fkt. $y = x \ln a$

2) Quotientenregel: $\frac{d}{dx} \tan x = ?$

$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

3) $(\arctan x)' = ?$ benutze $\tan(\arctan x) = x$

$$(\tan(\underbrace{\arctan x}_{y}))' = 1$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y$$

$$\tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

## Höhere Ableitungen

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = f^{(2)}(x)$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

Def.: $f : D \to \mathbb{R}$ heißt n-mal diff.bar, falls $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ $\forall x \in D$ existiert

Def.: $f : D \to \mathbb{R}$ heißt n-mal stetig diff.bar falls außerdem $f', f'', \dots, f^{(n)}$ auf $D$ stetig ist.

## 1.3 Taylor-Entwicklung

Potenzreihenentwicklung einer Fkt. $f(x)$ um $x = a$:

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \text{Taylor-Reihe}$$

Vor.: $f$ beliebig oft diff.bar.

NB: $T_f(x)$ konvergiert gegen $f(x)$, falls das Restglied $R_N(x) \xrightarrow{N\to\infty} 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_N(x)$$

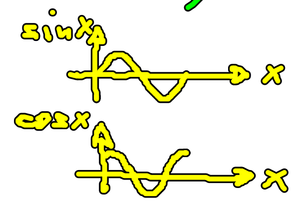
Beispiele

1) $f(x) = e^x$ ; $f^{(n)}(x) = e^x$

Taylor-Entwicklung um $x=0$:

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad (\text{konvergent } \forall x \in \mathbb{R})$$

2) $f(x) = \sin x$ Entwickl. um $x=0$:




$f'(x) = \cos x$ $f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$ $f''(0) = 0$
$f^{(3)}(x) = -\cos x$ $f^{(3)}(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$ $f^{(4)}(0) = 0$
...

$$T_f(x) = \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k$$

Praktisch: Abbruch nach einigen wenigen Termen

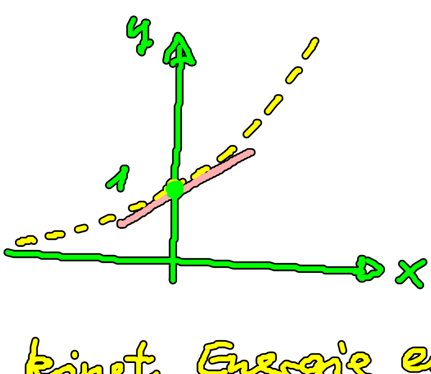
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots$$

reicht („Entwicklung bis zur n-ten Ordn.")

z.B. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

$= 1 + x + O(x^2)$

$\approx 1 + x$ (für $|x| \ll 1$)




Entwickl. bis zur ersten Ordnung

kinet. Energie eines relativist. Teilchens:

Gesamtenergie $E = mc^2$, $\quad m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

$m_0$ Ruhemasse
$v$ Teilchengeschw.
$c$ Lichtgeschw.

kinet. Energie:

$E_{kin} = E - E_0$ mit $E_0 = m_0c^2$ Ruheenergie

$$= mc^2 - m_0c^2$$
$$= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} - 1\right)$$

Taylorentw. der Wurzel um $x = \frac{v}{c} = 0$ :

$\frac{v}{c} \ll 1$ : $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \approx f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2}f''(0) + O(x^3)$

$$= 1 - \underbrace{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)\Big|_{x=0}}_{0} x$$

$$+ \frac{x^2}{2}\left[\underbrace{\frac{3}{4}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x)}_{0} - \frac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{2}(-2)\right]_{x=0}$$

$f(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2}$ für $x \ll 1$ eingesetzt in $E_{kin}$:

$$E_{kin} \approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right) - 1\right)$$

$$\approx \frac{1}{2}m_0v^2 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$$

$\downarrow$ klass. nichtrelativ. Mechanik

$\downarrow$ systemat. Methode, um Korrekturen der nichtrelat. Mech. (höhere Ordnungen) zu erhalten . . .

- Nichtrelativist. Mechanik als Grenzfall $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ der relativist. Mechanik

- Störungstheorie (Taylorentw. nach einem kleinen Parameter)

## 1.4 Asymptotisches Verhalten

Häufig braucht man nur das Verhalten einer Funktion bei sehr kleinem oder sehr großem Argument

**Beispiel**: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

a) Taylorentwicklung um $x=0$: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + O(x^4)\right) = 1$$

b) Regel von L'Hospital:

b1) Sei $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) \neq 0$ in einer Umgeb. v. $x_0$

Dann: $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

hier: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

b2)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

**Asymptot. Verhalten**:

z.B. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, Verh. für $x \to \infty$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^{-2}}}_{g(y) = \frac{1}{1+y}}, \quad y := x^{-2}$$

geometr. Reihe $\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + O(y^4)$

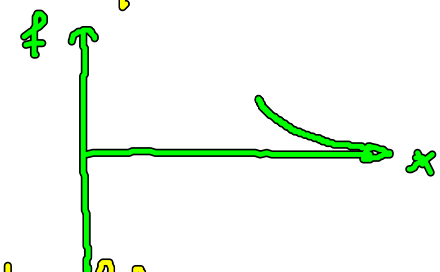
konvergent für $|y| < 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+y} \approx 1 - y = 1 - \frac{1}{x^2}$$

eingesetzt in $f(x)$:

$$f(x) \approx \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \dots\right) \approx \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

führender Term für $x \to \infty$




## Weitere wichtige Potenzreihenentwicklungen:

$$(1 \pm x)^m \approx 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + O(x^3) \qquad |x| \ll 1$$

binomische Reihe, gilt auch für gebrochenes $m$ (nicht nur $m \in \mathbb{Z}$)

z.B. $(1-x)^{-1/2} \approx 1 + \frac{x}{2}$ (vgl. relativist. Energie)