

1.5 Komplexe Zahlen

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$

x Realteil
 y Imaginärteil

Spezialfälle:

$$y = 0 : z \in \mathbb{R} \quad \text{reell}$$

$$x = 0 : z = iy \quad \text{rein imaginär}, \quad z = i \quad \text{imaginäre Einheit} \\ (i^2 = -1)$$

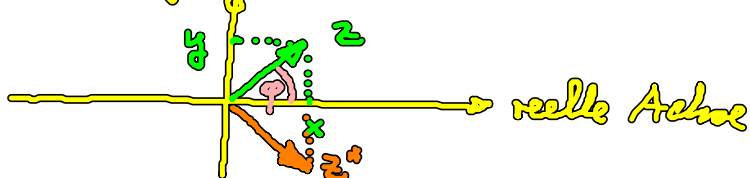
Erweiterung des Zahlensystems \mathbb{R} notwendig,
damit $\sqrt[n]{z}$ stets n Lösungen in \mathbb{C} hat.

z.B. $z^2 = -1$ hat die 2 Lösungen $z = i$, $z^* = -i$

komplex konjugierte Zahl: $z^* = x - iy$

Darstellung in der komplexen Zahlenebene:

imaginäre Achse



$$\arctan \frac{y}{x} = \varphi$$

Polardarstellung $z = |z| e^{i\varphi}$, Betrag $|z| = \sqrt{z z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$
 Phase $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$

Euler'sche Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Beweis: Potenzreihenentwicklung von $e^{i\varphi}$

Speziell:

$$e^{i\pi} = -1$$

schönste Formel der Mathematik!
 ♡

$$z = |z| e^{i\varphi} = \underbrace{|z| \cos \varphi}_x + i \underbrace{|z| \sin \varphi}_y$$

Formel von Moivre:

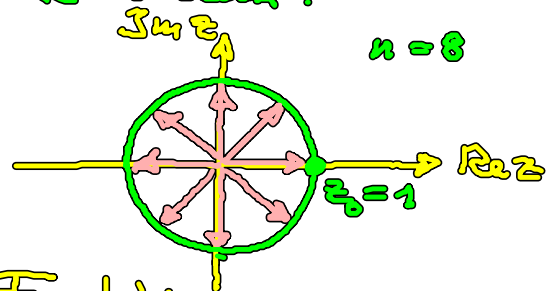
$$z^n = (x + iy)^n = (|z| e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Wurzel ziehen:

Sei $z^n = z_0 \Leftrightarrow z = z_0^{1/n}$

Beispiel $z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{i \frac{2\pi}{n} k}$ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

n komplexe Wurzeln!
 Beweis: $z^n = e^{i 2\pi k} = 1$ $n=8$



Verallgemeinerung der reellen Funktionen:

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \underline{\text{komplexe Fkt.}}$$

z.B. $f(x) = f(i\omega t) = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$

oder $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \mapsto f(t) = e^{i\omega t}$$

ω Kreisfrequenz
($\omega = 2\pi\nu$)

Anwendung: Schwingungen und
 $e^{i\omega t}$

Wellen

$$e^{i(kx + \omega t)}$$

(elektrodyn. Wellen,
quantenmech.
Materiewellen,
kontinuumsmech.
Wellen)

k Wellenzahl
($k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

λ Wellenlänge

2. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Motivation: Dynamische Grundgl. in der Physik
haben die Form von Differentialgl. (zeitliche Entwickl.)

z.B. Mechanik: Bewegung eines Massenpunktes

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = F(x(t))$$

$a(t)$ Beschleunigung

Newton'sche Beweg.gl.

m Masse

F Kraft

x Ort, t Zeit

• gewöhnl. Dgl.

z.B. Quantenmech.: Dynamik der Wellenfkt. eines Teilchens
 $\psi(x, t) \in \mathbb{C}$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t)$$

zeitabh.
Schrödinger-gl.

• partielle Dgl.: Ableitung nach mehreren Var. \rightarrow Kap. 3

z.B. Elektrodynamik: zeitliche Entwicklung der Felder

$\underline{E}(r, t)$ el. Feld

$\underline{B}(r, t)$ magn. Induktion

} Maxwell-gl.

→ Vektoranalysis → Kap. 4, 5

- einzelne Dgl. oder Systeme von Dgl.
- lineare Dgl. oder nichtlineare Dgl.
- Ordnung der Dgl.: höchste auftretende Ableitung

2.1 Gewöhnliche Differentiell. 1. Ordnung

$$\boxed{y'(x) = f(x, y)} \quad \begin{array}{l} \text{geg.: } f(x, y) \\ \text{gesucht } y(x) \end{array}$$

Beispiel: $y'(x) = x^2 + 2 \sin(xy)$

Spezialfall: Falls f nur von x abhängt,

$y'(x) = f(x)$, folgt die Lösung durch Integration:

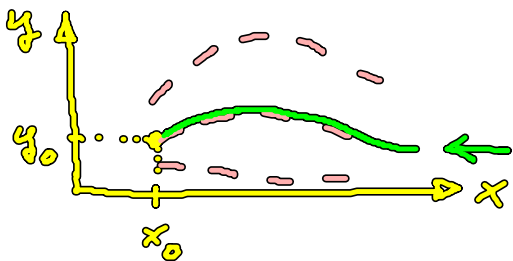
$$\Rightarrow y(x) = \int_{x_0}^x dx' f(x') + C \quad C = y(x_0) \text{ Anfangswert}$$

Beispiel: $y'(x) = x^3 + \cos x$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \sin x - \frac{1}{4}x_0^4 - \sin x_0 + C$$

Betrachte nun $\boxed{y' = f(x, y)}$

geometr. Interpretation: Richtungsfeld $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ definiert in jedem Pkt. (x, y) eine Steigung.



gesuchte Lösung:

Trajektorie $y(x)$ tangential zum Richtungsfeld, festgelegt durch Anfangsbed. $y(x_0)$

2.1.1 Lösung durch Separation der Variablen

Spezialfall $\boxed{y'(x) = f(x)g(y)}$ Dgl. faktorisiert

a) Nullstellen von $g(y) : y_1, y_2, \dots$
sind konstante Lösungen $y(x) = y_i$ der Dgl.

b) Für $g(y) \neq 0$

Separation der Var.: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \underbrace{\frac{dy}{g(y)}}_{\text{hängt nur von } y \text{ ab}} = \underbrace{f(x)dx}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}}$

Integration: $\int \frac{dy'}{g(y')} = \int dx' f(x')$

Anfangsbed. $y(x_0) = y_0$: $\int_{y_0}^y \frac{dy'}{g(y')} = \int_{x_0}^x dx' f(x')$ (*)

auflösen nach $y(x)$:

Sei $F(x)$ Stammfkt. von $f(x)$

sei $\phi(y)$ " " $\frac{1}{g(y)}$

(*) $\Leftrightarrow \phi(y) - \phi(y_0) = F(x) - F(x_0)$

$\Leftrightarrow \phi(y) = \underbrace{F(x) - F(x_0) + \phi(y_0)}_C$

$\Leftrightarrow y(x) = \phi^{-1}(F(x) + C)$ Lösung

Beispiele: 1) $y'(x) = y^2$

Anf. bed. $x_0 = 0$

$y(x_0) = y_0 > 0$

d.h. $f(x) = 1$

$g(y) = y^2$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \Rightarrow \int_{y_0}^y \frac{dy'}{y'^2} = \int_0^x dx'$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} = x$

$\Leftrightarrow y(x) = \left(\frac{1}{y_0} - x\right)^{-1} = \frac{y_0}{1 - y_0 x}$

$$2) y'(x) = e^y \sin x$$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int dx \sin x \Rightarrow \int_{y_0}^y dy' e^{-y'} = \int_{x_0}^x dx' \sin x'$$

$$\Leftrightarrow \left[-e^{-y'} \right]_{y_0}^y = \left[-\cos x' \right]_{x_0}^x$$

$$\Leftrightarrow -e^{-y} + e^{-y_0} = -\cos x + \cos x_0$$

$$\Leftrightarrow e^{-y} = \cos x + C$$

$$\text{auflösen nach } y(x) = -\ln(\cos x + C)$$

2.1.2 lineare Diff. gl. 1. Ordnung

$$\boxed{y'(x) = \lambda y(x)} \text{ linear in } y, \quad \lambda = \underline{\underline{\text{const}}} \in \mathbb{R}$$

z.B. radioaktiver Zerfall : $x = \text{Zeit } t$

$N(t)$ Zahl der zu Zeit t noch nicht zerfallenen Atome

$$N'(t) = \frac{dN}{dt} = -\alpha N(t) \quad \alpha \text{ Zerfallrate}$$

Lösungsansatz für lin. Dgl. mit konst. Koeffizienten:

$$y(x) = C e^{\lambda x}, \text{ denn } y'(x) = \lambda C e^{\lambda x} = \lambda y$$

Auf. bed. $y(x_0) = y_0$:

$$y_0 = C e^{\lambda x_0} \Leftrightarrow C = y_0 e^{-\lambda x_0}$$

$$\Rightarrow y(x) = y_0 e^{\lambda(x-x_0)} \quad \text{Lösung}$$

allg. Form:

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

inhomog. lin. Dgl.
1. Ordnung

geg. $a(x)$, $b(x)$ Inhomogenität

gesucht $y(x)$

z.B. mech. Teilchen mit Geschw. $y = v(t)$ unter

Einfluss der äußeren Kraft $F^a(t)$

sowie der Reibungskraft $F^r = -\gamma v(t)$

Stokes'sche Reibung

Newton: $m \frac{dv}{dt} = F^r(t) + F^a(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m} v + \frac{1}{m} F^a(t)$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \quad \text{allg. Form}$$