$$\boxed{y'(x) = a(x)y(x) + b(x)}$$ inhomogene lin. Dgl. 1. Ordnung

<u>Lösungsstrategie</u>:

(i) Lösung der <u>homog</u>. Gl. $y'(x) = a(x)y(x)$ durch Separ. der Var. $(g(y) = y)$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx\, a(x)$$

$$\Leftrightarrow \ln y = A(x) + \tilde{C} \quad \text{mit } A(x) \text{ Stammfkt. von } a(x)$$

$$\Leftrightarrow y(x) = e^{A(x)+\tilde{C}} = Ce^{A(x)}$$ <u>allg. Lös. der hom. Gl.</u>

(ii) Lösung der inhom. Gl. (keine Separ. möglich!): finde eine <u>spezielle inhomogene</u> Lösung $\psi(x)$, dann ist

$$y(x) = \underbrace{C\varphi(x)}_{\substack{\text{allg. Lös.} \\ \text{der hom.} \\ \text{Gl. } \varphi(x) = e^{A(x)}}} + \underbrace{\psi(x)}_{\substack{\text{spezielle} \\ \text{Lös. der} \\ \text{inhom. Gl.}}}$$ die allg. Lös. der inhomog. Dgl.

Beweis:

$$\begin{aligned} y'(x) &= C\varphi'(x) + \psi'(x) \\ &= a(x)C\varphi(x) + [a(x)\psi(x) + b(x)] \\ &= a(x)\underbrace{[C\varphi(x) + \psi(x)]}_{y(x)} + b(x) \end{aligned}$$

□

<u>Spezielle inhom. Lös.</u>:

<u>Lösungsansatz</u> $\psi(x) = u(x)e^{A(x)}$ (<u>Variation der Konst</u>. C)

$\Downarrow$

bestimme $u(x)$ so, dass ψ die inhom. Dgl. erfüllt

d.h.

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)e^{A(x)}\right) \stackrel{!}{=} a(x)u(x)e^{A(x)} + b(x)$$

$$\frac{du}{dx} e^{A(x)} + \cancel{u(x) e^{A(x)} \underbrace{\frac{dA}{dx}}_{a(x)}} \overset{!}{=} \cancel{a(x) u(x) e^{A(x)}} + b(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = e^{-A(x)} b(x)$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \int dx' e^{-A(x')} b(x') + \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} dx' a(x')} \left(\int_{x_0}^{x} dx' e^{-\int_{x_0}^{x'} dx'' a(x'')} b(x') + \underbrace{y(x_0)}_{y_0} \right)}$$

Beweis, dass $y(x)$ tatsächlich die inhom. Dgl. erfüllt:

$$y'(x) = e^{\int_{x_0}^{x} dx' a(x')} a(x) \left(\int_{x_0}^{x} dx' e^{-\int_{x_0}^{x'} dx'' a(x'')} b(x') + y(x_0) \right)$$

$$+ \underbrace{e^{\int_{x_0}^{x} dx' a(x')} e^{-\int_{x_0}^{x} dx'' a(x'')}}_{1} b(x)$$

$$= a(x) y(x) + b(x) \qquad \square$$

<u>Beispiel</u>:

1) $y' = 2xy + x^3$

Lösung der homog. Gl. $y' = 2xy$: $\frac{dy}{y} = 2x\,dx$

$$\Rightarrow y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} dx' 2x'} = y_0 e^{x^2 - x_0^2} = C e^{x^2}$$

Spezielle Lösung der inhom. Gl.: $y(x_0) = y_0$, $x_0 = 0$

$$y(x) = e^{\int_0^x dx' 2x'} \left(\underbrace{\int_0^x dx' \underbrace{e^{-\int_0^{x'} dx'' 2x''}}_{e^{-x'^2}} \cdot x'^3}_{\int_0^x dt\, e^{-t^2} t^3} + y_0 \right)$$

2) Mech. Teilchen mit verallg. Reibung u. äußerer Kraft

$$\dot v(t) + \gamma(t)\, v(t) = f(t)$$

$\gamma(t)$: zeitabh. Reib.koeff.

homog. Problem: $\dot v = -\gamma(t) v \;\Rightarrow\; v(t) = C e^{-\int_0^t dt' \gamma(t')}$

inhom. Problem: Anf.bed. $v(0) = v_0$

$$v(t) = e^{-\int_0^t dt' \gamma(t')} \left(\int_0^t dt' \, e^{\int_0^{t'} dt'' \gamma(t'')} f(t') + v_0 \right)$$

Beiträge der äußeren Kraft von $t' = 0$ bis t (Gegenwart), gewichtet mit dem „Propagator" $e^{\int_0^{t'} dt'' \gamma(t'')}$ (Systemantwort auf äußere Kraft = <u>linear Response</u>)

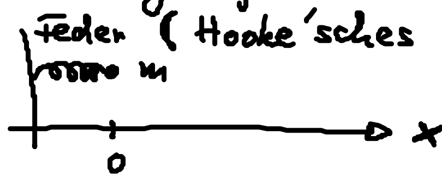
z.B. für $\gamma = \text{const.}$: $v(t) = \int_0^t dt' \, e^{-\gamma(t-t')} f(t') + v_0$

<u>Gedächtnisterm</u> „<u>memory kernel</u>"

2.1.3 Systeme von Differentialgln. 1. Ordnung

Motivation: a) Zurückführung von Dgl. 2. Ordnung auf Systeme von Dgl. 1. Ordnung

<u>Beispiel</u>: Schwingung eines Massenpunktes



(Hooke'sches Gesetz $F = -Kx$)

Newton'sche Bewegungsgl. $m\ddot x = -Kx$ lin. Dgl. 2. Ordnung

Impuls $p(t) := m\dot{x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{m} p \\ \dot{p} &= -Kx \end{aligned}}$ 2 gekoppelte Dgln. 1. Ordnung

allg. $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= f(x, y_1, y_2) \end{aligned}}$ mit $y_1 = y(x)$, $y_2 = y'(x)$

System 1. Ordn.

<u>dynam. System</u>: $\boxed{\dot{\underline{y}} = \underline{F}(t, \underline{y})}$ $\underline{y} \in \mathbb{R}^2$, t Zeit

2-dim. Vektorfeld

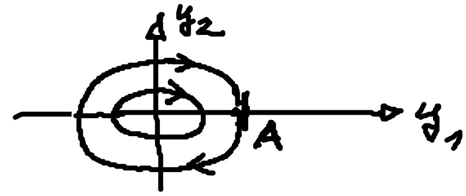
NB: Für <u>eindeutige</u> Lösung: 2 Anf. bed. $y_1^0 = y(x_0)$, $y_2^0 = y'(x_0)$

harmon. Osz.: $\boxed{\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega_0^2 x \end{aligned}}$ $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

geometr. Veranschaulichung in der (y_1, y_2) Phasenebene:

<u>Trajektorien</u> (Bahnkurven):

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix}$$



Für feste Energie ($\hat{=}$ Amplitude A) legt Phase φ den Anfangspkt. fest.

b) gekoppelte Systeme von Dgl.: gekoppelte Teilchen (Wechselwirkung)

— Mechanik (Quantenmech.) vielen Teilchen

z.B. Coulomb-WW, Gravit.-WW, Federn

2.2 Lineare Differentialgln. 2. Ordnung

$$\boxed{y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)}$$

Inhomogenität

<u>Lösungsstrategie</u>:

(i) Allg. Lösung der homog. Dgl.

$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$

Die Funktionen $\varphi_1(x)$ u. $\varphi_2(x)$ bilden ein <u>Fundamentalsystem</u>

(ii) Addiere eine spezielle Lösung $\psi(x)$ der inhom. Dgl.

<u>Spezialfall</u>: homogene Dgl. 2. Ordn. mit <u>konst</u>. Koeff. a_1, a_2

$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0$

z.B. Schwingungen eines Massenpkt.es mit Reibung

$\boxed{m\ddot{x} = -Kx - \gamma\dot{x}}$ <u>gedämpfter harmon. Osz</u>.

$K, \gamma > 0$

<u>Lösungsansatz</u>: $x(t) = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow m\lambda^2 e^{\lambda t} = -Ke^{\lambda t} - \gamma\lambda e^{\lambda t}$

$\Leftrightarrow \boxed{m\lambda^2 + \gamma\lambda + K = 0}$ <u>charakteristische Gl</u>.

Lösung $\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{K}{m}}$

Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Fundamentalsystem der homog. Gl.:

$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

$\Rightarrow x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$

a) <u>ungedämpfte Fall</u>: $\gamma = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-K}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{K}{m}} = \pm i\omega \quad (K>0)$

rein imaginär

allg. Lösung:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

<u>harmon. Schwingung</u>

$\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$

$$= (c_1 + c_2)\cos\omega t + i(c_1 - c_2)\sin\omega t$$