2.3 Lineare homogene Systeme von Dgln. 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Betrachte
$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n \\
y_2' &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1} y_1 + \dots \qquad + a_{nn} y_n
\end{aligned}
$$

Motivation: Eine oder mehrere lin. Dgln. 2. Ordnung können immer in ein lin. System 1. Ordn. umgeschrieben werden (dyn. System), z.B. Schwingung eines Massenpunktes (§2.2), gekoppelte lineare Oszillatoren (§2.1.3)

Notation:

Vektor $\underline{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Matrix $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\Rightarrow \quad y_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, y_j(x) \qquad i = 1, \dots, n$$

kompakt:

$$\boxed{\underline{y}'(x) = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}(x)}$$

Spezialfall $n=1$: $y'(x) = a\,y(x) \Rightarrow y(x) = C_0 e^{ax}$

allgemein $n>1$: Lösungsansatz $\underline{y}(x) = e^{\underline{\underline{A}}x}\,\underline{C}_0$

$\uparrow$ Vektor der Anf. bed. $\underline{y}(x=0)$

Def. der Exponentialfkt. einer Matrix über Taylorreihe:

$$e^{\underline{\underline{A}}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\underbrace{(\underline{\underline{A}})^k}_{\text{k-faches Matrixprodukt}} = \underbrace{1}_{\text{Einheitsmatrix } \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{A}} + \ldots$$

entsprechend:

$$e^{\underline{\underline{A}}x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\underline{\underline{A}})^k x^k$$

Zeige, dass der Ansatz die Dgl. erfüllt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(e^{\underline{\underline{A}}x}\underline{C}_0\right) &= \left(\frac{d}{dx}e^{\underline{\underline{A}}x}\right)\underline{C}_0 \\
&= \left(\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\underline{\underline{A}})^k x^k\right)\underline{C}_0 \\
&= \left(\sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\underline{\underline{A}})^k k x^{k-1}\right)\underline{C}_0 \quad \text{(da Term } k=0 \text{ verschwindet)} \\
&= \underline{\underline{A}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}(\underline{\underline{A}})^{k-1}x^{k-1}\right)\underline{C}_0 \\
&\overset{m:=k-1}{=} \underline{\underline{A}}\underbrace{\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(\underline{\underline{A}})^m x^m\right)}_{e^{\underline{\underline{A}}x}}\underline{C}_0
\end{aligned}$$

$$= \underline{\underline{A}}\, y(x)$$ $\square$

Wie wertet man $e^{\underline{\underline{A}}x}$ praktisch aus?

Lineare Algebra (Wiederholung):

a) Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$ Matrix.

Eigenwertgl. $\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{e} = \lambda \underline{e}}$ $\quad \underline{e} \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektor, $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert

$\hat{=}$ homog. lineares Gleichungssystem

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \mathbb{1})\,\underline{e} = 0$$

mit Einheitsmatrix $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Nichttriviale Lösung $\underline{e}$ ex. genau dann, wenn

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ <u>charakteristisches Polynom</u> (n-ten Grades in λ)

$\Rightarrow$ Eigenwerte λ_α $\hat{=}$ Nullstellen des char. Polynoms

Bestimmung der Eigenvektoren:

Löse für jedes λ_α $(\alpha = 1, \dots, n)$ das lineare Gleichungssystem

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_\alpha \mathbb{1})\,\underline{e}_\alpha = 0$$

(nur festgelegt bis auf Normierungsfaktor)

<u>Speziell</u>: symm. reelle Matrix $\underline{\underline{A}}$ $(A_{ij} = A_{ji})$ $\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$, Eigenvektoren reell

(gilt allgemeiner für <u>normale</u> reelle Matrizen $A A^T = A^T A$)

und für selbstadjungierte komplexe Matrizen $A_{ij} \stackrel{!}{=} (A_{ji})^*$)

transponierte Matrix $A^T_{ij} = A_{ji}$

b) <u>Hauptachsentransformation</u>

Seien die Eigenwerte u. Eigenvektoren bekannt,

Bilde die Transformationsmatrix $\underline{\underline{T}} := (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$

(Spalten sind die Eigenvektoren)

Dann lässt sich mit $\underline{\underline{T}}$ die Matrix $\underline{\underline{A}}$ auf Diagonalform transformieren:

(Koordinatentransformation auf die neue Basis $\underline{e}_\alpha$ = Eigenbasis $\underline{y} \to \underline{\underline{T}}\,\underline{y}$, $\underline{\underline{A}} \to \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}$)

$$\boxed{\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}} \quad (*)$$

$\underline{\underline{T}}^{-1}$ Inverse der Matrix $\underline{\underline{T}}$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$n \times n$ Diagonalmatrix

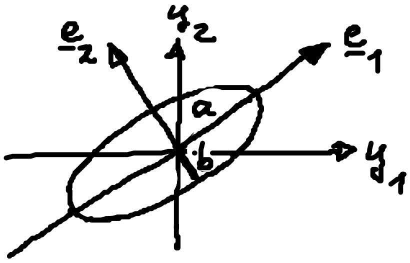
$$(*) \Rightarrow \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{T}}}_{1}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} \Rightarrow \boxed{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{D}}\,\underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{T}}}_{1} = \underline{\underline{D}}}$$

<u>Speziell</u>: reelle symm. Matrix $\underline{\underline{A}}$ $(A_{ji} = A_{ij})$

$\Rightarrow$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{T}}$ ist orthogonale Matrix (Drehung der Koord.achsen)

$\underline{y}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{y} = 1$ ist symm. quadrat. Form (Ellipse in $\mathbb{R}^2$, falls $\lambda_\alpha > 0$)



Hauptachsentransformation auf Eigenbasis $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ (Drehung)

$$\underline{x}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

mit Hauptachsen $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$

<u>Zurück zur Lösung der Dgl.</u> $\underline{y}(x) = e^{\underline{\underline{A}}x} \underline{C}_0$:

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$ einsetzen:

$$e^{\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}\right)^k}\, x^k$$

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{T}}}_{1}\underline{\underline{D}}\underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{T}}}_{1}\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} \ldots = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}^k\,\underline{\underline{T}}^{-1}$$

$$= \underline{\underline{T}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{\underline{D}}^k x^k \right) \underline{\underline{T}}^{-1}$$

$$= \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}x}\, \underline{\underline{T}}^{-1}$$

$\underline{\underline{D}}$ ist diagonal $\Longrightarrow$ $\underline{\underline{D}}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

also $e^{\underline{\underline{D}}x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{\underline{D}}^k x^k = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$ auch diagonal

<u>allg. Lösung</u> von $\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\, \underline{y}$:

$$\underline{y}(x) = e^{\underline{\underline{A}}x} \underline{C}_0 = \underline{\underline{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}}_{\text{Fundamentalmatrix}} \underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1} \underline{C}_0}_{\text{Anf. Bed. in Eigenvektor-Basis}}$$

- Linearkombination von Exponentialfkt.en (Fundamental-lösungen)

Alternative Lösung durch direkten Lösungsansatz $\underline{y}(x) = \underline{e}\, e^{\lambda x}$:

Bestimme $\underline{e}$ und λ durch Einsetzen in Dgl.

$$\underline{y}'(x) = \underline{e}\,\lambda e^{\lambda x} = \lambda \underline{y}(x) \overset{!}{=} \underline{\underline{A}}\,\underline{y}(x) = \underline{\underline{A}}\,\underline{e}\, e^{\lambda x}$$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\lambda \underline{e} = \underline{\underline{A}}\,\underline{e}}$ Eigenwertgl. für $\underline{\underline{A}}$ $\Rightarrow \lambda_\alpha, \underline{e}_\alpha$

allg. Lös. = Linearkomb. aller lin. unabh. Lös. $\underline{y}_\alpha = \underline{e}_\alpha e^{\lambda_\alpha x}$

$$\boxed{\underline{y}(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \underline{e}_\alpha e^{\lambda_\alpha x}}$$

<u>Beispiel</u>: gedämpfter harmon. Osz.

$$\boxed{m\ddot{x}(t) = -Kx - \gamma \dot{x}}$$

Umschreibung auf System 1. Ordnung

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{m} p \\ \dot{p} &= -Kx - \frac{\gamma}{m} p \end{aligned}}$$

Koeff. matrix :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -K & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$$

Eigenwertgl. $\underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \lambda \underline{y}$

$\Rightarrow$ charakt. gl. $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} \\ -K & -\frac{\gamma}{m} - \lambda \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0$

$$0 = -\lambda\left(-\frac{\gamma}{m} - \lambda\right) - (-k)\frac{1}{m}$$

$$= \lambda\left(\frac{\gamma}{m} + \lambda\right) + \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$