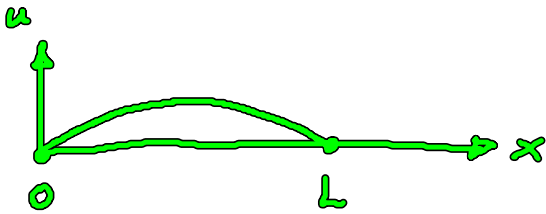


3.1 Schwingende Saite



Sei $u(x,t)$ die Auslenkung einer an beiden Enden eingespannten Saite

Netto-Kraft auf Seilstück $\Delta x \perp x$ -Achse:

$$F_{\text{tot}} = F_y(x+\Delta x) - F_y(x) = F(\sin\alpha|_{x+\Delta x} - \sin\alpha|_x)$$

$$\approx F\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{\Delta u}{\Delta x}\Big|_x\right)$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \rightarrow F dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Newton: $m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$m = \rho g dx$, $c^2 := \frac{F}{\rho g}$ ρ Querschnitt

Wellengleichung in $d=1$ Dim.:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

c Schallgeschw.
hyperbol. part. Dgl.
 $(ac - (\frac{b}{2})^2 < 0$ in $a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy}$)

gesucht $u(x,t)$ für $t > 0$

geg.: Anfangsprofil $u(x, t=0) = u_0(x)$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x)$$

Randbed. $u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0 \quad \forall t$
 (Dirichlet)

Lösungsansatz (spezielle Lösungsklassen: stehende Wellen):

Separationsansatz $u(x,t) = y(x)z(t)$
 (weil Orts- u. Zeitableitungen separieren)

einsetzen:

$$y(x) \ddot{z}(t) = c^2 y''(x) z(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\ddot{z}(t)}{c^2 z(t)}}_{\text{hängt nur von } t \text{ ab}} = \underbrace{\frac{y''(x)}{y(x)}}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}}$$

muss für alle x und t gelten!

$$\Rightarrow \text{L.S.} = \text{const.} = -k^2 \quad \text{R.S.} = \text{const.} = -k^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{z}(t) = -k^2 c^2 z(t) \\ y''(x) = -k^2 y(x) \end{cases}$$

Aufwertproblem

Randwertproblem
 $x = [0, L]$

2 gewöhnl. lin. Dgl. 2. Ord. mit konstantem Koeff.

→ Eigenwertproblem $Ay = \lambda y$, A Diffop. (mit Randbed.)

$$\Rightarrow \text{allg. Lsg.} : y(x) = \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx) \\ z(t) = \gamma_1 \cos(ckt) + \gamma_2 \sin(ckt)$$

$$u(x, t) = y(x) z(t)$$

$$\text{Räuml. Randbed.} : u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow y(x=0) = y(x=L) = 0$$

$$\underbrace{\alpha \cos(k \cdot 0)}_1 + \underbrace{\beta \sin(k \cdot 0)}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \quad \beta \sin(kL) = 0$$

$$\stackrel{\beta \neq 0}{\Rightarrow} kL = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Eigenwertbed.} : \lambda_n = -k_n^2$$

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Wellenzahl
(1dim. Wellenvektor)

Eigenlösungen:

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) [a_n \cos(ck_n t) + b_n \sin(ck_n t)]$$



mit $a_n := \beta \gamma_1$
 $b_n := \beta \gamma_2$

stehende Wellen

Wellengl. ist linear in $u(x,t) \Rightarrow$ Linear-komb. von Lösungen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) [a_n \cos(\underbrace{\omega_n t}_{ck_n}) + b_n \sin(\omega_n t)]$$

Dispersionsrelation $\boxed{\omega(k) = ck}$

Bestimme die Koeff. a_n, b_n aus den Anf. bed.

(i) $u(x,t=0) \stackrel{!}{=} u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

(ii) $\left. \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \right|_{t=0} \stackrel{!}{=} v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ck_n b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

Wie bestimmt man die Koeff. a_n, b_n ?

- Benutze Orthogonalität der Funktionen $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$:
 (analog Basis im Vektorraum \mathbb{R}^n)

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm} \quad \text{mit } \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Kronecker-Symbol

($n=m$: $\frac{1}{L} \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{2}$)

$$\frac{1}{L} \int_0^L (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1) dx = 1$$

löse (i) und (ii) nach a_n bzw. b_n auf mittels Orthog.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x)$$

$$\int_0^L dx \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \int_0^L dx \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) u_0(x)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{L}{2} \delta_{nm}}_{\frac{L}{2} a_m} = \int_0^L dx u_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$\text{analog: } b_m = \frac{2}{L} \frac{1}{c k_m} \int_0^L dx v_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

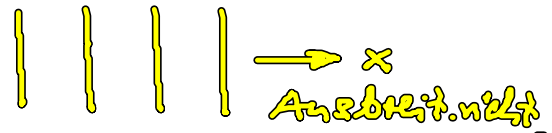
3.2 Laufende Wellen

Andere Lösungsklasse der Wellengl.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \quad x \in \mathbb{R}$$

(keine Randbed.)

Ansatz: $u(x,t) = e^{i(kx - \omega t)}$ (ebene Wellen)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) &= -\omega^2 u \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) &= -k^2 u \end{aligned} \right\} \text{eingesetzt: } -\omega^2 u = -c^2 k^2 u$$


⇒ Dispersionsbeziehung $\boxed{\omega(k) = \pm ck}$

keine Eigenwertbed. (da keine Randbed.): $k \in \mathbb{R}$

Phase $\varphi(x,t) := kx - \omega t$

$$\text{Phasengeschw. } \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\varphi = \text{const}} = \frac{\omega}{k} = \pm c \quad x = \frac{\omega}{k} t + \varphi$$

Periode T : $u(x_0, t+T) \stackrel{!}{=} u(x_0, t) \Rightarrow \omega T = 2\pi$

Kreisfrequenz. $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$

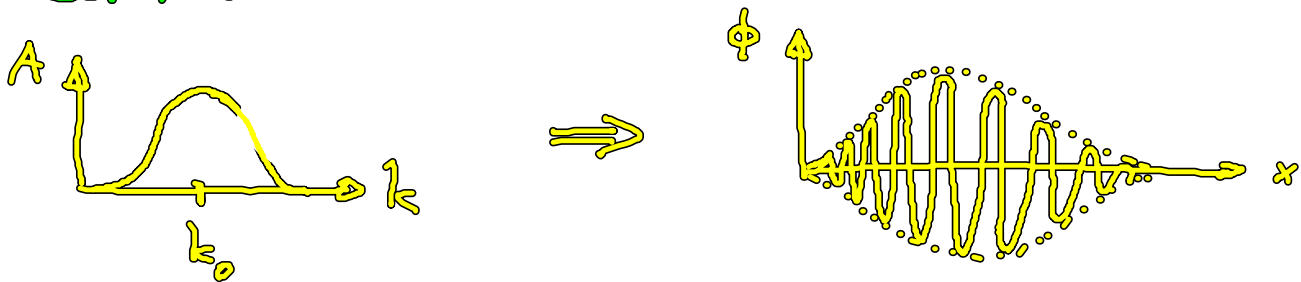
Wellenlänge λ : $u(x, t_0) \stackrel{!}{=} u(x+\lambda, t_0) \Rightarrow k\lambda = 2\pi$

Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Wellenpaket : lineare Superposition von ebenen Wellen mit gleicher Ausbreitungsrichtung, aber verschied. k :

$$\phi(x, t) = \int dk A(k) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \omega = \omega(k)$$

Sei $A(k)$ im k -Raum um k_0 lokalisiert :



3.3 Fourier-Reihen, Fourier-Transformation (eindimensional)

3.3.1 Fourier-Reihe

Jede im Intervall $[-a, a]$ quadratintegrierbare periodische Fkt. $f(x)$ ($\int_{-a}^a |f(x)|^2 dx < \infty$)

mit der Periode $2a$ lässt sich entwickeln:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x} \quad \text{mit } k_n = n \frac{\pi}{a}$$

(lineare Zerlegung nach ebenen Wellen $e^{ik_n x}$):

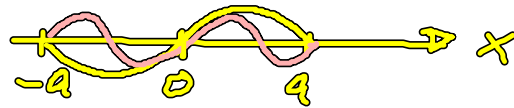
$$k_0 = 0 \Rightarrow \text{const. Term}$$

$$k_{\pm 1} = \pm \frac{\pi}{a} \Rightarrow \underline{\lambda = 2a}$$

$$k_{\pm 2} = \pm \frac{2\pi}{a} \Rightarrow \underline{\lambda = a}$$

...

period. Randbed.



Entwicklungskoeff.:

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) e^{-ik_n x} dx = \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-a}^a e^{i(k_n - k_m)x} dx$$

$$n \neq m: \frac{1}{i(k_n - k_m)} \left[e^{i(k_n - k_m)a} - e^{-i(k_n - k_m)a} \right]$$

$$2i \sin \left[\underbrace{(k_n - k_m)a}_{(n-m)\pi} \right] = 0$$

$$n = m: \int_{-a}^a dx = 2a$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) e^{-ik_n x} dx \quad c_n \in \mathbb{C}$$

Falls $f(x)$ reell, muss gelten: $c_{-n} = c_n^*$, $c_0 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{ik_n x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{ik_n x} + c_0$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-ik_n x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{+ik_n x}}_{2 \operatorname{Re} \{ \dots \}} + c_0 \quad \square$$

Alternativ: Entwicklung nach \cos u. \sin (stehende Wellen)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x)) \quad k_n = n \frac{\pi}{a}$$

mit reellen Koeff. a_n, b_n

Periodizität: $f(x+2a) = \dots = f(x)$

Entwickl. koeff.:

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a dx f(x) \cos(k_n x)$$

$$b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a dx f(x) \sin(k_n x)$$

folgt aus der Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{a} \int_{-a}^a dx \cos(k_n x) \cos(k_m x) = \delta_{nm}$$

$$\frac{1}{a} \int_{-a}^a dx \sin(k_n x) \sin(k_m x) = \delta_{nm}$$

$$\frac{1}{a} \int_{-a}^a dx \sin(k_n x) \cos(k_m x) = 0$$

Die Fkt.en $\{ \cos(k_n x), \sin(k_n x) \}_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $\{ e^{ik_n x} \}_{n \in \mathbb{Z}}$

bilden eine Basis (orthonormiert, vollständig)

im Vektorraum L^2 -Funktionen:

(i) Entwicklung $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x}$

$$\underline{y} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=1}^d c_n \underline{\hat{e}}_n \quad \text{in } d\text{-dim. Euklid. Vektorraum } \mathbb{R}^d$$

(ii) Entw. koef.

$$c_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx f(x) e^{-ik_n x}$$

$$\underline{y}_n \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^d \hat{e}_{n,i} y_i = \underline{\hat{e}}_n \cdot \underline{y} = \langle \underline{\hat{e}}_n | \underline{y} \rangle$$

Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \text{def. } \langle e_n | e_n \rangle &:= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx e_n^*(x) e_n(x) \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx e^{i(k_n - k_n)x} \end{aligned}$$

(iii) Basisfkt.en sind orthogonal zueinander

u. normiert :

$$\langle e_n | e_n \rangle = \delta_{nn}$$

(iv) Die Basisfkt.en spannen den ganzen Vektorraum auf (Vollständigkeit):

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx f^*(x) f(x) = \langle f | f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

(Parseval'sche Gl.)