

3.3.2 Fourier-Transformation

Erinnerung:

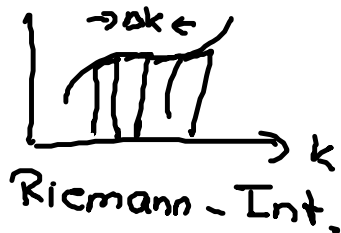
Entwicklung einer $2a$ -period. Fkt. $f(x)$ in der Basis $\{e^{ik_n x}\}$ mit $k_n = n \frac{\pi}{a} \Rightarrow$ Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x}, \quad c_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) e^{-ik_n x} dx$$

Ziel: Übergang zu nicht period. Fkt.en
formal $[-a, a] \rightarrow (-\infty, \infty)$

$$k_{n+1} - k_n \equiv \Delta k = \frac{\pi}{a} \rightarrow 0$$

$$\sum \Delta k \rightarrow \int dk$$



Mit $\hat{f}_n := c_n \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta k}$ ergibt sich im Kontinuumslimes:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{ik_n x} \Delta k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k) e^{ikx}$$

$$\hat{f}_n = c_n \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(x) e^{ik_n x} dx \rightarrow \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Fourier-Transformation:

Die Fourier-Darstellung einer nichtperiod. Fkt $f(x)$ ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k) e^{ikx}$$

"Fourier-Integral"

lineare Zerlegung nach ebenen Wellen
 e^{ikx} mit Amplitude $\hat{f}(k)$

$\hat{f}(k)$ heißt Fourier-Transformierte von $f(x)$.

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

Also Fourier-Transform $\mathcal{F}: f \rightarrow \hat{f}$
und Umkehrung $\mathcal{F}^{-1}: \hat{f} \rightarrow f$

Eigenschaften:

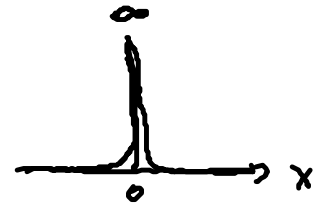
(i) Multiplikationssatz

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k) \frac{d}{dx} e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \underbrace{[ik \hat{f}(k)]}_{\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)} e^{ikx}$$

$$\text{also: } \mathcal{F}: \frac{d}{dx} f \rightarrow ik \hat{f}$$

~~iii~~ (ii) Dirac'sche Delta - Fkt $\delta(x)$ Bem. $\delta(x-x_0) = \delta(x)$
für $x_0=0$

- "Physiker Definition" $\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \neq 0 \\ \infty, & \text{für } x = 0 \end{cases}$



- $\delta(x)$ kann auch definiert werden als Grenzwert von Funktionenfolgen $\rightarrow \ddot{U}$
- $\delta(x)$ keine "Fkt." im math. Sinn, sondern ein "Distribution", d.h. lin. Funktional $\delta: f \rightarrow f(0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x-x_0) = f(x_0)$$

- insbesondere $f \equiv 1, x_0=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$$

- $f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}, x_0=0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathcal{F}: \delta(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Umkehrung d. Fourier-Transform:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}$$

$$\mathcal{F}^{-1} : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rightarrow \delta(x)$$

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')}$$

⇒ Orthogonalitätsrelation der Basisfkt.en $e^{ikx}, e^{ik'x}$

analog:

$$\delta(k-k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k-k')x} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Umbenennung} \\ x \leftrightarrow k \end{array} \right)$$

(iii) Faltungssatz

$$\hat{y}(k) = \hat{f}(k) \hat{g}(k) \longrightarrow y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x-x') g(x')$$

Faltungsintegral

Beweis: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x-x') g(x') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk' \hat{f}(k') e^{ik'(x-x')} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{g}(k) e^{ikx'} \right]$

$$\stackrel{\text{Vertauschen die Integralreihenfolge}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \hat{f}(k') e^{ik'x} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{g}(k) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i(k-k')x'}}_{= 2\pi \delta(k-k')} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \underbrace{\hat{f}(k') \hat{g}(k')}_{\hat{y}(k)} e^{ik'x} = y(x)$$

□

NB: Manchmal wird die Fourier-Transformierte auch mit asym. Vorfaktoren definiert:

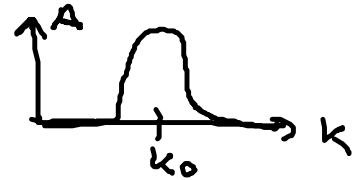
$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \quad (\Leftrightarrow) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k) e^{ikx}$$

Fourier-Darstellung von Wellenpaketen

lineare Superpos. von laufenden Wellen mit verschiedenen

$$\Phi(x,t) = \int dk A(k) e^{i(kx - \omega t)} \quad , \quad \omega = \omega(k)$$

Sei $A(k)$ im k -Raum um k_0 lokalisiert



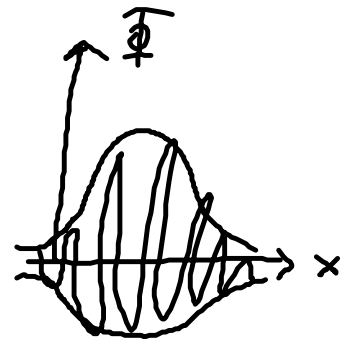
$\Rightarrow \Phi(x,t)$ ist ein lokalisiertes Wellenpaket

$$\approx \underbrace{e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}}_{\text{Trägerwelle}} \underbrace{\tilde{A}(x,t)}_{\text{Einhüllende}}$$

Trägerwelle

Einhüllende

(langsam zeit u. ortsveränderlich)

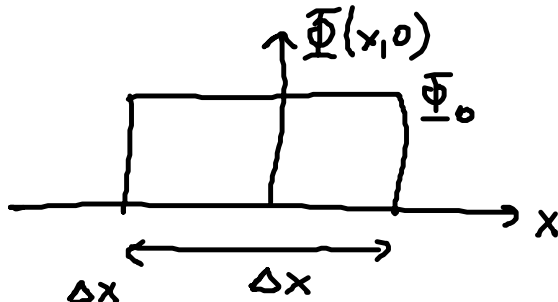


$$t=0: \Phi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\Phi}(k) e^{ikx}$$

Dies ist eine Fourier-Darstellung im k -Raum mit d. Fourier-Transformierten $\hat{\Phi}(k) = \sqrt{2\pi} A(k)$.

$$\hat{\Phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi(x,0) e^{-ikx}$$

Bsp :



$$A(k) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} dx e^{-ikx} = \frac{\Phi_0}{\pi} \frac{e^{-ik\frac{\Delta x}{2}} - e^{ik\frac{\Delta x}{2}}}{(-2ik)}$$

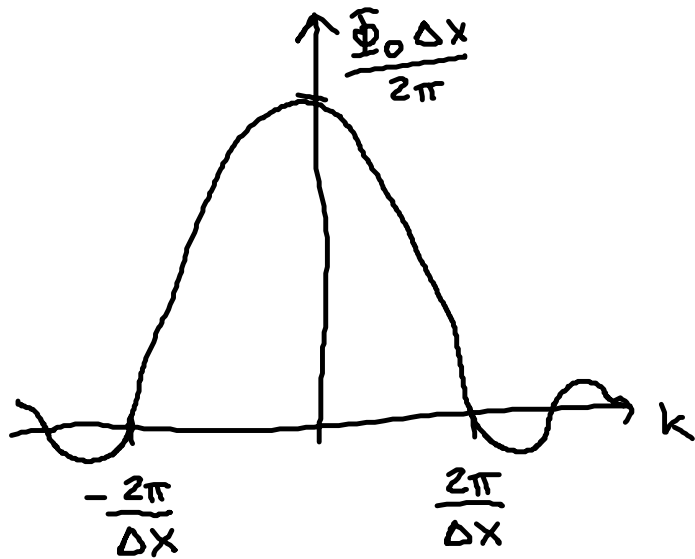
$$= \frac{\Phi_0}{\pi} \frac{\sin(k\frac{\Delta x}{2})}{k} = \frac{\Phi_0 \Delta x}{2\pi} \frac{\sin(k\frac{\Delta x}{2})}{k(\frac{\Delta x}{2})}$$

"Spaltfkt."

(Fouriertransformierte einer Rechtecksfkt.)

1. Nst.: $k\frac{\Delta x}{2} = \pi$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin(k\frac{\Delta x}{2})}{k\frac{\Delta x}{2}} = 1$$



⊙ Gauß'sches Wellenpaket

Unschärfe-
relation:

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 4\pi$$

Breite im
Ortraum

Breite im k-Raum ($\approx \frac{4\pi}{\Delta x}$)

Interpretation: Je schärfer lokalisiert das Wellenpaket im Ortsraum (Δx klein), desto breiter

ist es im k -Raum.

↳ allg. Eigenschaft d. Fourier-Transf.

Grenzfall: δ -Fkt. im Ortsraum \xrightarrow{x} \Rightarrow const. im k -Raum

3.4 Diffusionsgl. (1dim)

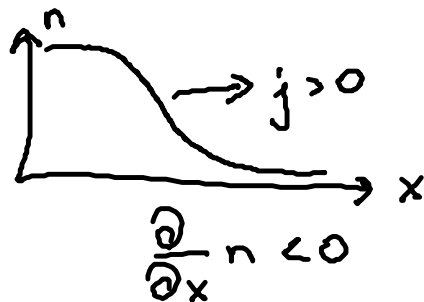
Änderung der Konzentration $n(x,t)$ eines Stoffes als Fkt. von Ort u. Zeit?

(i) Stromdichte $j(x,t) := v(x,t) n(x,t)$ $[\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}]$
 $[\text{cm/s}] [\text{cm}^{-3}]$ v : Strömungsgeschw.

Fick'sches Gesetz:

$$j(x,t) = -D \frac{\partial}{\partial x} n(x,t)$$

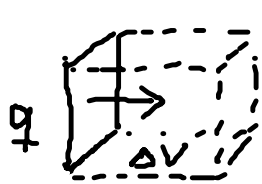
\uparrow
Diffusionskonst.



(ii) lokaler Erhaltungstrom (Kontinuitätsgl.)

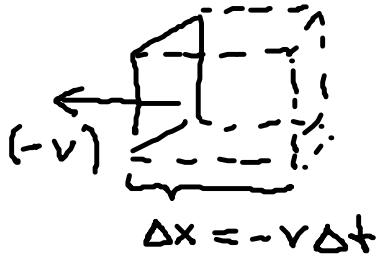
$$\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} j(x,t) = 0 \quad (\text{lokale Bilanzgl.})$$

- Masse $m = nV$ die pro Zeiteinheit Δt in ΔV mit Querschnittsfläche q überstrichen wird



$$\Rightarrow \frac{n \Delta V}{\Delta t}$$

- aus Sicht der Platte die von Flüssigkeit durchströmt wird



$$\Rightarrow \frac{-n q v \Delta t}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{n \Delta V}{\Delta t} \stackrel{!}{=} - \underbrace{q n v}_j \frac{\Delta x}{\Delta x} = \frac{-\Delta(V_j)}{\Delta x}, \quad \begin{matrix} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial x} //$$

Struktur d. Kontinuitätsgl. gilt allg. für alle Größe, die einer globalen Erhaltung unterliegen z.B. Massen, Ladung, Energie (ohne Dissipat.!), Impulserhaltung, ...

$$(i) + (ii) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t)}$$

(1dim)
"Diffusionsgl."

parabol. part. DGL

$$\left(ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0, \quad au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + \dots \right)$$

$$\left[\text{NB: ellipt. part. DGL: } ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 > 0, \text{ z.B. Laplace gl.} \right. \\ \left. \text{für elektrost. Pot. } \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi = 0 \right]$$

Lösung: 1. Möglichkeit: Separationsansatz
2. Möglichkeit: Fourie-Trafo

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{n}(k,t) e^{ikx}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \underbrace{\hat{n}(k,t) (-k^2)} e^{ikx}$$

Multiplikationssatz

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{n}(k,t) e^{ikx} \right) = \mathcal{D} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk (-k^2) \hat{n}(k,t) e^{ikx}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[\frac{\partial}{\partial t} \hat{n}(k,t) + \mathcal{D} k^2 \hat{n}(k,t) \right] e^{ikx} = 0 \quad \forall x$$

$\stackrel{!}{=} 0$ lin. gewöhnl. DGL 1. Ord.

$$\rightarrow \hat{n}(k,t) = \hat{u}_0(k) e^{-\mathcal{D}k^2 t}$$

mit $\hat{u}_0(k) = \hat{n}_0(k, t=0)$

geg. Anfangsbed.
Fouriertransf. $\hat{}$

Rücktrafo:

$$n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{u}_0(k) e^{ikx} e^{-Dk^2 t}$$

\hat{u} : Gauß'sche AB, δ -Anfangsbed.