3.3.2 Fourier-Transformation

Erinnerung:

Entwicklung einer $2a$-period. Fkt. $f(x)$ in der Basis $\{e^{ik_n x}\}$ mit $k_n = n\frac{\pi}{a}$ $\Rightarrow$ Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x} \quad , \quad c_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-ik_n x}$$

Ziel: Übergang zu nicht period. Fkt.en

formal $\quad [-a, a] \longrightarrow (-\infty, \infty)$

$$k_{n+1} - k_n \equiv \Delta k = \frac{\pi}{a} \longrightarrow 0$$

$$\sum \Delta k \longrightarrow \int dk$$

Riemann-Int.

Mit $\hat{f}_n := c_n \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta k}$ ergibt sich im Kontinuumslimes:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{ik_n x} \Delta k \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{f}(k)\, e^{ikx}$$

$$\hat{f}_n = c_n \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-ik_n x} dx \longrightarrow \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx$$

Fourier-Transformation:

Die Fourier-Darstellung einer nichtperiod. Fkt $f(x)$ ist

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{f}(k)\, e^{ikx}}$$

"Fourier-Integral"

lineare Zerlegung nach ebenen Wellen e^{ikx} mit Amplitude $\hat{f}(k)$

$\hat{f}(k)$ heißt Fourier-Transformierte von $f(x)$.

$$\boxed{\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}}$$

Also Fourier-Trafo $\mathcal{F}: f \longrightarrow \hat{f}$

und Umkehrung $\mathcal{F}^{-1}: \hat{f} \longrightarrow f$

Eigenschaften:

(i) Multiplikationssatz

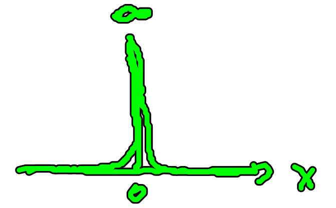
$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{f}(k) \frac{d}{dx} e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \underbrace{\left[ik\, \hat{f}(k)\right]}_{\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)} e^{ikx}$$

also: $\mathcal{F}: \frac{d}{dx} f \longrightarrow ik\hat{f}$.

(ii) Dirac'sche Delta-Fkt $\delta(x)$

Bem. $\delta(x-x_0)=\delta(x)$ für $x_0=0$

- "Physiker Definition" $\delta(x)=\begin{cases} 0, & \text{für } x\neq 0 \\ \infty, & \text{für } x=0 \end{cases}$



- $\delta(x)$ kann auch definiert werden als Grenzwert von Funktionenfolgen → Ü
- $\delta(x)$ keine "Fkt." im math. Sinn, sondern ein "Distribution", d.h. lin. Funktional $\delta: f \to f(0)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\,\delta(x-x_0) = f(x_0)}$$

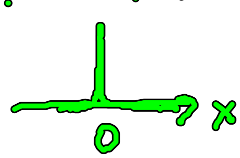
- insbesondere $f\equiv 1$, $x_0=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1$$

- $f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx}$, $x_0=0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x)\, e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathcal{F}:\ \delta(x) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$



Umkehrung d. Fourier-Trafo:

$$\boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}}$$

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \longrightarrow \delta(x)}$$

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-x')}$$

$\Rightarrow$ Orthogonalitätsrelation der Basisfkt.en $e^{ikx}, e^{ikx'}$

analog:

$$\delta(k-k') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(k-k')x} \qquad \left(\begin{matrix}\text{Umbenennung} \\ x \leftrightarrow k\end{matrix}\right)$$

(iii) Faltungssatz

$$\hat{y}(k) = \hat{f}(k)\,\hat{g}(k) \longrightarrow y(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x-x')\, g(x')}_{\text{Faltungsintegral}}$$

Beweis: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x-x')\,g(x') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk'\, \hat{f}(k')\, e^{ik'(x-x')} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{g}(k)\, e^{ikx'}\right]$

$$\underset{\substack{\text{Vertauschen die} \\ \text{Integralreihenfolge}}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} dk'\, \hat{f}(k')\, e^{ik'x}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{g}(k)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, e^{i(k-k')x'}}_{=2\pi\,\delta(k-k')} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk'\, \underbrace{\hat{f}(k')\,\hat{g}(k')}_{\hat{y}(k)}\, e^{ik'x} = y(x) \qquad \square$$

NB: Manchmal wird die Fourier-Trafo auch mit asym. Vorfaktoren definiert:

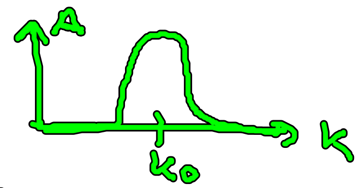
$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{f}(k)\, e^{ikx}$$

Fourier-Darstellung von Wellenpaketen

Lineare Superpos. von laufenden Wellen mit verschiedenen k:

$$\Phi(x,t) = \int dk\, A(k)\, e^{i(kx - \omega t)} \quad , \quad \omega = \omega(k)$$

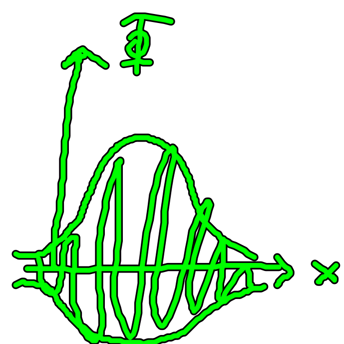
Sei $A(k)$ im k-Raum um k_0 lokalisiert



$\Rightarrow$ $\Phi(x,t)$ ist ein lokalisiertes Wellenpaket

$$\approx \underbrace{e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}}_{\text{Trägerwelle}} \underbrace{\mathcal{A}(x,t)}_{\text{Einhüllende}}$$

(langsam zeit u. ortsveränderlich

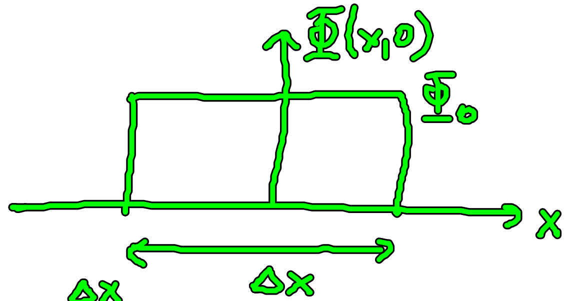


$$t=0: \quad \Phi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k)\, e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{\Phi}(k)\, e^{ikx}$$

Dies ist eine Fourier-Darstellung im k-Raum mit d. Fourier-Transformierten $\hat{\Phi}(k) = \sqrt{2\pi}\, A(k)$.

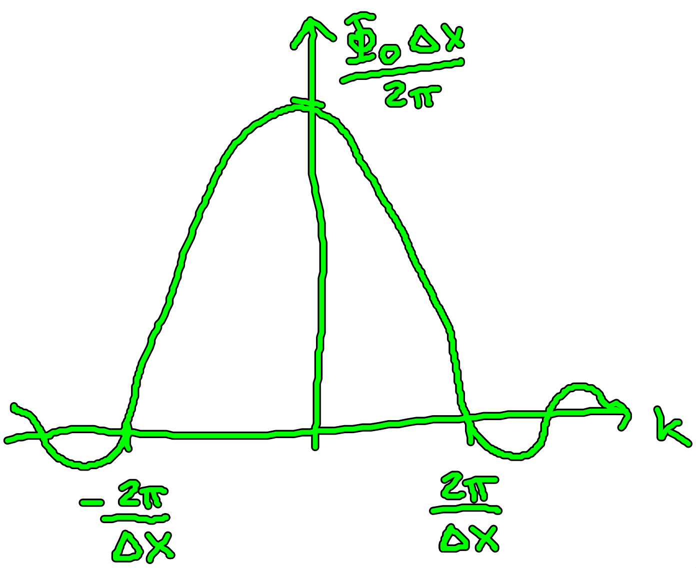
$$\hat{\Phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Phi(x,0)\, e^{-ikx}$$

Bsp:



$$A(k) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} dx \; e^{-ikx} = \frac{\Phi_0}{\pi} \, \frac{e^{-ik\frac{\Delta x}{2}} - e^{ik\frac{\Delta x}{2}}}{(-2ik)}$$

$$= \frac{\Phi_0}{\pi} \, \frac{\sin\left(k\frac{\Delta x}{2}\right)}{k} = \frac{\Phi_0 \Delta x}{2\pi} \, \underbrace{\frac{\sin\left(k\frac{\Delta x}{2}\right)}{k\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}}_{\otimes}$$



"Spaltfkt."
(Fouriertransformierte einer Rechtecksfkt.)

1 Nst.: $k\frac{\Delta x}{2} = \pi$

$$\lim_{k \to 0} \otimes = \left.\frac{\frac{\Delta x}{2}\cos\left(k\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\right|_{k=0} = 1$$

Ü Gauß'sches Wellenpaket

Unschärferelation:

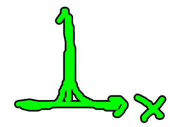
$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta k \approx 4\pi}$$

Breite im Ortraum

Breite im k-Raum $\left(\approx \frac{4\pi}{\Delta x}\right)$

Interpretation: Je schärfer lokalisiert das Wellenpaket im Ortsraum (Δx klein), desto breiter ist es im k-Raum.

↳ <u>allg. Eigenschaft d. Fourier-Transf.!</u>

Grenzfall: δ-Fkt. im Ortsraum  $\Rightarrow$ const. im k-Raum

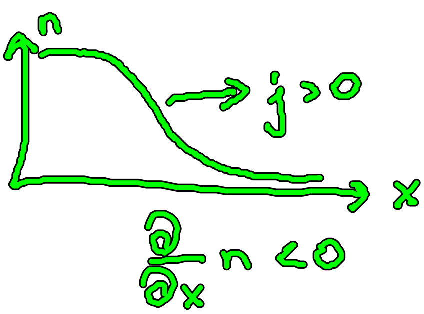
3.4 Diffusionsgl. (1dim)

Änderung der Konzentration $n(x,t)$ eines Stoffes als Fkt. von Ort u. Zeit?

(i) Stromdichte $\quad j(x,t) := v(x,t)\, n(x,t) \quad [\mathrm{cm^{-2}/s}]$

$[\mathrm{cm/s}]\ [\mathrm{cm^{-3}}]$ $\quad$ v: Strömungsgeschw.

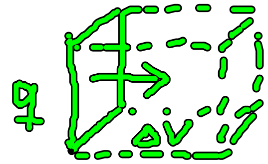
Fick'sches Gesetz:
$$\boxed{j(x,t) = -D \frac{\partial}{\partial x} n(x,t)}$$
D: Diffusionskonst.



(ii) lokaler Erhaltungsstrom (Kontinuitätsgl.)

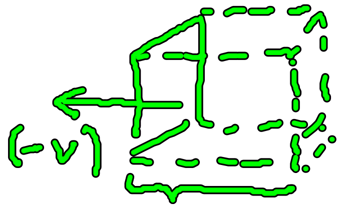
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} j(x,t) = 0}$$
(lokale Bilanzgl.)

- Masse $m = nV$ die pro Zeiteinheit Δt in ΔV mit Querschnittsfläche q überstrichen wird



$$\Rightarrow \frac{n\Delta V}{\Delta t}$$

- Aus Sicht der Platte die von Flüssigkeit durchströmt wird



$$\Rightarrow \frac{-nqv\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}$$

$\Delta x = -v\Delta t$

$$\Rightarrow \quad \frac{n\Delta V}{\Delta t} \overset{!}{=} -q\underbrace{nv}_{j}\frac{\Delta x}{\Delta x} = \frac{-\Delta(Vj)}{\Delta x}, \qquad \Delta x \to 0, \quad \Delta t \to 0$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} \quad //$$

Struktur d. Kontinuitätsgl. gilt allg. für alle Größe, die einer globalen Erhaltung unterliegen z.B. Massen, Ladung, Energie (ohne Dissipat.!), Impulserhaltung, ...

$$(i)+(ii) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\, n(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t)}$$

(1dim) "Diffusionsgl."

parabol. part. DGL

$$\left(ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0 \,, \quad a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} + \dots \right)$$

[$\underline{\text{NB}}$: ellipt. part. DGL : $ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 > 0$, z.B. Laplace Gl.
für elektrostat. Pot. $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi = 0$]

$\underline{\text{Lösung}}$: 1. Möglichkeit: Separationsansatz
2. Möglichkeit: Fourier-Trafo

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \hat{n}(k,t) \, e^{ikx}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \underbrace{\hat{n}(k,t)\,(-k^2)}_{\text{Multiplikationsatz}} \, e^{ikx}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \hat{n}(k,t) \, e^{ikx} \right) = D \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, (-k^2) \hat{n}(k,t) \, e^{ikx}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial t} \hat{n}(k,t) + D k^2 \hat{n}(k,t) \right]}_{\overset{!}{=} 0} e^{ikx} = 0 \quad \forall x$$

lin. gewöhnl. DGL 1. Ord.

$$\hookrightarrow \hat{n}(k,t) = \hat{u}_0(k) \, e^{-Dk^2 t}$$

mit $\hat{u}_0(k) = \underbrace{\hat{n}_0(k, t=0)}_{\text{geg. Anfangsbed. Fouriertransf.}}$!

Rücktrafo:

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \; \hat{u}_0(k)\, e^{ikx}\, e^{-Dk^2 t}$$

Ü: Gauß'sche AB, δ-Anfangsbed.