

4. Vektoren und Koordinatensysteme

4.1 Kinematik

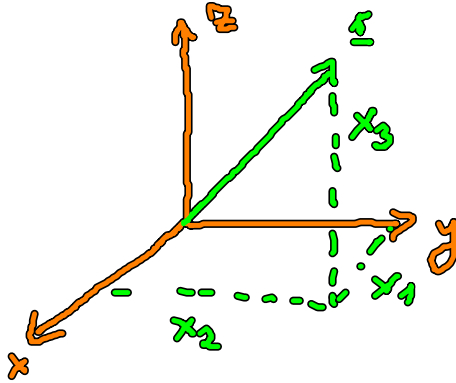
Bewegung eines Massenpunktes charakterisiert durch

Ortsvektor $\underline{r}(t) \in \mathbb{R}^3$

Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}(t) := \dot{\underline{r}}(t) = \frac{d}{dt} \underline{r}(t)$

Beschleunigungsvektor $\underline{a}(t) := \dot{\underline{v}}(t)$

Kartesisches Koordinatensystem



Rechtssystem!

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3)^T$$

Komponenten

- Skalarprodukt (inneres Produkt) : $\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$
Notation auch $(\underline{a}, \underline{b})$, (\vec{a}, \vec{b}) , $\underline{a} \underline{b}$

- Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$

- dyadische Produkt (Tensorprodukt)

$\underline{a} \otimes \underline{b}$, auch $\underline{a} \underline{b}$

Tensor 2. Stufe mit Komponenten $a_i b_j$

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_n b_1 \\ a_1 b_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_n b_n & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung

Berechne die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ aus vorgegebener Beschleunigung $\underline{a}(t)$

Anfangsbed.: $\underline{r}(0) = \underline{r}_0$

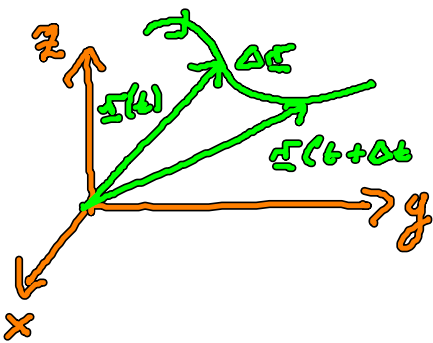
$\underline{v}(0) = \underline{v}_0$

Lösung

$$\underline{v}(t) = \underline{v}_0 + \int_0^t \underline{a}(t') dt'$$

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t + \int_0^t \left[\int_0^{t'} \underline{a}(t'') dt'' \right] dt'$$

a) Kartesische Koordinaten



$$\underline{r}(t) = \sum_{j=1}^3 x_j(t) \underline{e}_j$$

↑
Komponenten

kartes. Basis-
vektoren

$$|\underline{e}_j| = 1$$

zeitunabhängig
Einheitsvektoren

Geschwindigkeitsvektor

$$\underline{v}(t) = \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j(t) \underline{e}_j = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$$

tangential zur Bahnkurve

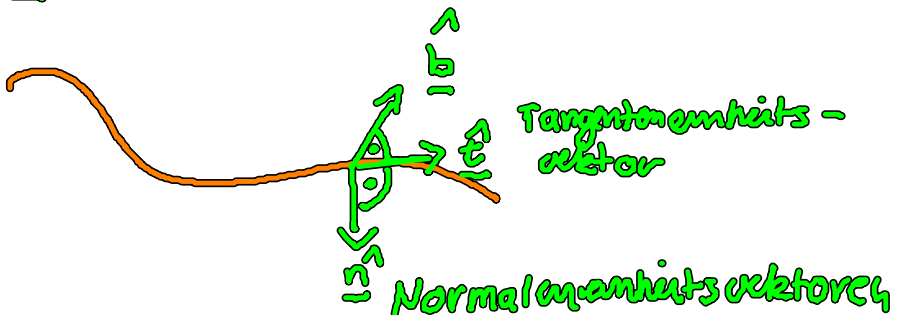
Beschleunigung

$$\underline{a}(t) = \sum_{j=1}^3 \ddot{x}_j(t) \underline{e}_j$$

b) Natürliche Koordinaten

Begleitendes Dreieck

Binormalen einheitsvektor



Tangenteneinheits-
vektor

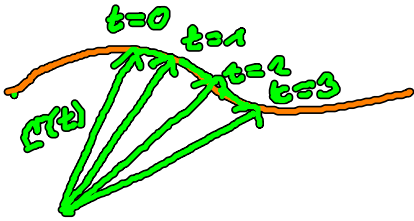
Normaleneinheitsvektoren

Das begleitende Dreibein (orthonormiertes Rechtssystem) ist in jedem Punkt der Bahnkurve

Tangenten-Einheitsvektor $\hat{t} := \frac{dr}{dt} / \left| \frac{dr}{dt} \right|$

Parametrisierung der Bahnkurve $\underline{r}(t)$ nach der Bogenlänge $s(t)$

$$s(t) := \int_0^t \left| \frac{dr(t')}{dt'} \right| dt' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} |r(t_{n+1}) - r(t_n)|$$



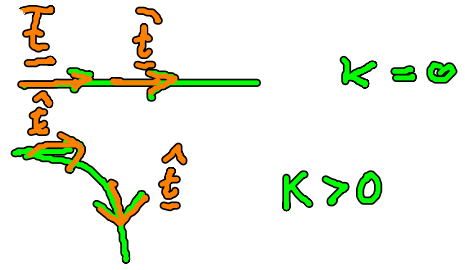
Also: $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{dr}{dt} \right|$

$$\Rightarrow \hat{t} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dr}{ds}$$

(\hat{t} liegt also tangential zur Bahnkurve in Richtung wachsender Bogenlänge)

(Neue Parametrisierung $\tilde{r}(s) = r(t(s))$ statt $r(t)$)
 ~ dann vergessen

Änderung der Richtung von $\hat{t}(s)$
 Maß für die Krümmung $K := \left| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right|$
Krümmungsradius $\tilde{\rho} := \frac{1}{K}$



Normaleneinheitsvektor $\hat{n} := \frac{d\hat{t}}{ds} / \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right| = \frac{1}{K} \frac{d\hat{t}}{ds}$

(Beweis: $\hat{n} \perp \hat{t}$
 $\hat{t} \cdot \hat{t} = 1 \Rightarrow 0 = \frac{d}{ds} (\hat{t} \cdot \hat{t}) = 2 \hat{t} \cdot \frac{d\hat{t}}{ds} = 0$)

\hat{n} und \hat{t} spannen die Schmiegeebene auf (momentane Bahnebene)

Binormalen einheitsvektor $\hat{\underline{b}} := \hat{\underline{t}} \times \hat{\underline{n}}$
 $\hat{\underline{b}} \perp \hat{\underline{t}}, \hat{\underline{n}}$ (d.h. $\hat{\underline{b}} = \text{const}$, falls Bewegung)
 in fester Ebene

Geschwindigkeitsvektor: $\underline{v}(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \Rightarrow |\underline{v}| = \frac{ds}{dt}$

$$\underline{v}(t) = v \hat{\underline{t}}$$

↑
Betrag

↙
Richtung

Beschleunigungsvektor

$$\underline{a}(t) = \frac{d}{dt}(v \hat{\underline{t}}) = \dot{v} \hat{\underline{t}} + v \frac{d\hat{\underline{t}}}{dt} = \dot{v} \hat{\underline{t}} + v \frac{d\hat{\underline{t}}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\underline{a}(t) = \dot{v} \hat{\underline{t}} + \frac{v^2}{\rho} \hat{\underline{n}}$$

↑
Tangential-
Beschleunigung

liegt in der Schwingungsebene
 Normal- (Zentripetal-) beschleunigung

Zusammenfassung (Frenet'sche Formeln)

$$\frac{dr}{ds} = \hat{\underline{t}}$$

$$\frac{d\hat{\underline{t}}}{ds} = \kappa \hat{\underline{n}}$$

κ Krümmung $\kappa := \frac{d\hat{\underline{t}}}{ds}$

(i) $\frac{d\hat{\underline{b}}}{ds} = -\tau \hat{\underline{n}}$

τ = Torsion der Raumkurve
 $\tau := \left| \frac{d\hat{\underline{b}}}{ds} \right|$

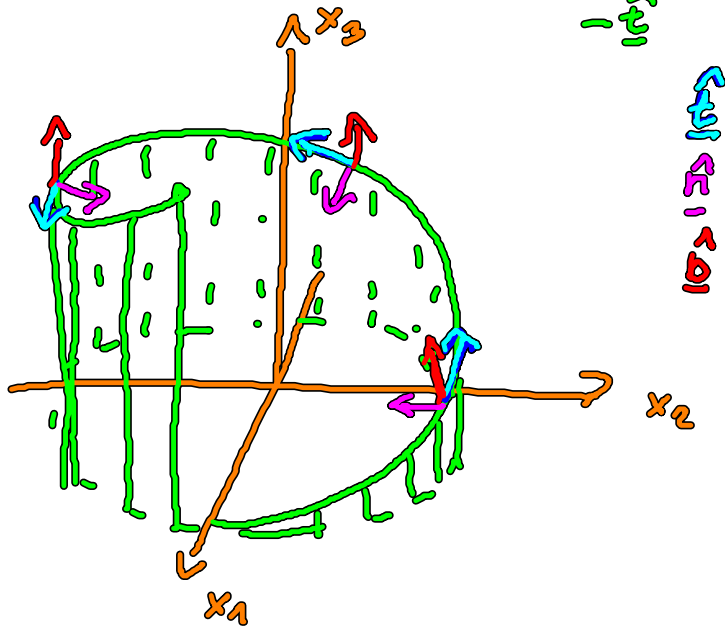
(ii) $\hat{\underline{t}} \times \hat{\underline{n}} = \hat{\underline{b}}$

(ii) $\frac{d\hat{\underline{n}}}{ds} = -\kappa \hat{\underline{t}} + \tau \hat{\underline{b}}$

„Beweis“ (i) $\frac{d}{ds} \underline{b}^\wedge = \underbrace{\frac{d}{ds} \underline{t}^\wedge \times \underline{n}^\wedge + \underline{t}^\wedge \times \frac{d}{ds} \underline{n}^\wedge}_{=0} = \frac{d\underline{b}^\wedge}{ds} \perp \underline{t}^\wedge \quad \frac{d\underline{b}^\wedge}{ds} \perp \underline{b}^\wedge$

$\frac{d}{ds} \underline{b}^\wedge \parallel \underline{n}^\wedge$

(ii) $\frac{d}{ds} \underline{n}^\wedge = \frac{d\underline{b}^\wedge}{ds} \times \underline{t}^\wedge + \underline{b}^\wedge \times \frac{d\underline{t}^\wedge}{ds} = -\tau \underline{n}^\wedge \times \underline{t}^\wedge + \kappa \underbrace{\underline{b}^\wedge \times \underline{n}^\wedge}_{= -\underline{t}^\wedge} = \tau \underline{b}^\wedge - \kappa \underline{t}^\wedge$



4.2 Krummlinige Koordinaten

Motivation: Symmetrien ausnutzen, z.B. Zylindersymmetrie

Sei $\underline{r} = \underline{r}(u, v, w)$ krummlinigen Koordinaten u, v, w

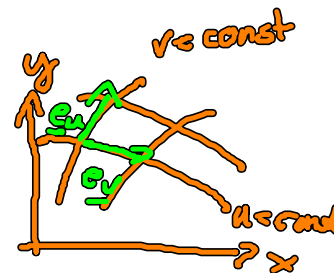
$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - \underline{r}(u, v, w) \quad (\text{kleine \u00c4nderungen})$$

$$= \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial \underline{r}}{\partial w} \Delta w \quad (\text{Taylorentwicklung})$$

Tangenten - Einheitsvektoren:

$$\underline{e}_u = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \right|} \quad \underline{e}_v = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right|} \quad \underline{e}_w = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial w}}{\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial w} \right|}$$

$$\Rightarrow \Delta \underline{r} = \underline{e}_u \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \right| \Delta u + \underline{e}_v \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right| \Delta v + \underline{e}_w \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial w} \right| \Delta w$$



Linienelement $\Delta s_i = |\Delta \underline{r}|$

$$(\Delta s)^2 = \Delta \underline{r} \cdot \Delta \underline{r} = \underline{e}_u \underline{e}_u \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \right|^2 (\Delta u)^2 + \underline{e}_u \underline{e}_v \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v + \dots$$

Zusammengefasst

$$|\Delta s|^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} \Delta u_i \Delta u_j$$

$$u_1 = u \quad u_2 = v \quad u_3 = w$$

$$g_{ij} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j} \quad \text{Metrik}$$

(metrischer Tensor)

Speziell

Krummlinige - orthogonale Koordinaten

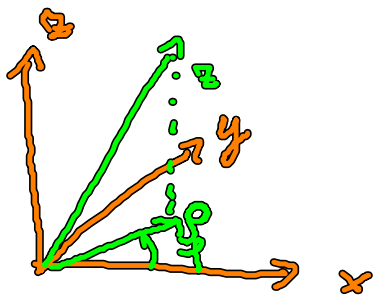
$$\underline{e}_{u_i} \cdot \underline{e}_{u_j} = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad |\Delta s|^2 = g_{uu} (\Delta u)^2 + g_{vv} (\Delta v)^2 + g_{ww} (\Delta w)^2$$
$$=: g_u^2 (\Delta u)^2 + g_v^2 (\Delta v)^2 + g_w^2 (\Delta w)^2$$

↑
metr. Koeffizienten

Beispiele:

a) Zylinderkoordinaten

$$\underline{r} = \underline{r}(\rho, \varphi, z)$$



$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$
$$z = z$$

Umkehrung $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

b) Kugelkoordinaten

$$\underline{r} = \underline{r}(r, \vartheta, \varphi)$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$
$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$
$$z = r \cos \vartheta$$

