XI.4 Supraleitender Strom und Londongleichung

Grundlage der Londontheorie der Supraleitung ist der Strom ; $\underline{j} \propto \underline{A}$

Stimmt das ?

$$j = \frac{q}{2m} \psi^+(\underline{r},t) \, (\underbrace{p}_{(A)} - \underbrace{e\underline{A}}_{(B)}) \, \psi(\underline{r},t) + h.c.$$

Das Vektorpotential muß durch selbstkonsistente Rechnung bestimmt werden.

Bei keinem Magnetfeld $\Rightarrow$ kein Vektorpotential (Eichung)

So sollte das im Grundstand verschwinden ((Cooper Paare)

$$\langle \phi_0 | \hat{j} | \phi_0 \rangle = 0$$

(a) Bei normalen Leitern verschiebt sich die Wellenfunktion des Grundzustand bei angelegtem $\underline{A}$ - Feld, so dass der (A) Term durch die (B) Term kompensiert.

(b) Bei Supraleitern gibt es Energielücke zwischen Grundzustand und angeregtem Zustand, damit ist für kleine A die Verschiebung der Wellenfunktion nicht möglich.

Ergo bei Supraleitern, fällt (A) Anteil weg!

Dann bleibt der Term (B) übrig, also

$$\hat{j} = -\frac{q^2}{2m} \psi^+ \underline{A} \psi \propto \underline{A}$$

$$\langle \hat{j} \rangle = -\frac{e^2}{2m}\frac{1}{V}\sum_{qQ\lambda} e^{-iQ\cdot r} A(r) \langle a^\dagger_{q+\frac{Q}{2}\lambda}\, a_{q-\frac{Q}{2}\lambda}\rangle$$

bei einem räumlich homogenen System gilt

$$Q = 0$$

$$\hat{j}_{SL} = -\frac{e^2}{m} \underline{A}(\underline{r})\, n_{el}$$

Wir wenden jetzt $\nabla\times$ oder ∂_t auf die Gleichung an.

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla\times \hat{j}_{el} &= -\frac{e^2}{m} n_{el}\, \underline{B} \\ \partial_t\, \hat{j}_{el} &= \frac{e^2}{m} n_{el}\, \underline{E} \end{aligned}}$$

Wir können das in die Maxwellgleichung einsetzen:

$$\nabla\times \underline{B} = \mu_0\, \hat{j}_{SL} \qquad \text{(Maxwell)} \qquad \Big|\, \nabla\times$$

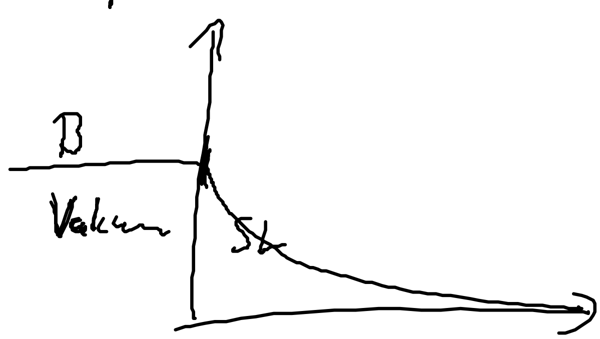
$$\underbrace{\nabla\times\nabla\times \underline{B}}_{\nabla\cdot \underline{B} = 0} = \mu_0\, \nabla\times \hat{j}_{SL} = -\frac{e^2 n_{el}\mu_0}{m}\, \underline{B}$$

$$-\Delta \underline{B} = -\underbrace{\frac{e^2 n_{el}\mu_0}{m}}_{=:\lambda_L^2}\, \underline{B}$$

$\Rightarrow$ Eindimensional (z Richtung) x-Komponenten

$$\partial_t^2 B_x = \lambda_L^2 B_x$$

$$\Rightarrow \quad B_x = B_{x,0}\, e^{-\frac{z}{\lambda_L}}$$



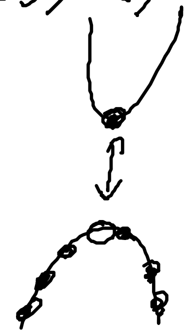
XI.5 Polaritonen

Das elektromagnetische Feld wechselwirkt mit der Materie (polarisiert), dies führt zur Ausbildung neuer

Quasiteilchen zw. polarisierter Materie und den Photonen

Beispiel:

(1) Exziton-Polariton (z.B. zwei Bandsystem)



$$B^+_{\nu,\underline{K}} = \sum_{\underline{k}\,\underline{k}'} \delta(\underline{K}-\underline{k}-\underline{k}')\, \psi_\nu\left(\frac{\underline{k}+\underline{k}'}{2}\right) a^+_{c,k,s}\, a_{v,k',s}$$

Nehmen wir nun nur ein bestimmtes Exziton bei $\underline{K}=0$, $\nu=0$

$$[B_{0,0}, B^+_{0,0}]_- = \sum_{\substack{\underline{k}\,\underline{k}'\\ ss'}} \psi_0(\underline{k})\,\psi_0^*(\underline{k}')\,[a^+_{v\underline{k},s}\, a_{c\underline{k}s},\, a^+_{c\underline{k}'s'}\, a_{v\underline{k}'s'}]_-$$

$$= \sum_{\underline{k}s} |\psi_0(\underline{k})|^2 \left(a^+_{vks}\, a_{vks} - a^+_{ck}\, a_{ck} \right)$$

$\simeq 1$ also fast Bosonisch!

$$\rho(\underline{r},t) = \underbrace{\sum_{\underline{k}} d_{vc,\underline{k}}\, a^+_{v\underline{k}}\, a_{c\underline{k}}}_{\cdots\cdots B^-} + c.c.$$

(2) Die transversal optischen Phononen

$$\rho(\underline{r}) = \sum_{iq} \rho_{i,q}\, (b_{i,q} + b^+_{i,q})\, e^{iq\cdot\underline{r}}$$

diese sind Bosonen!

(3) Häufig quantisiert man auch Polarisation phänomenologisch wie in (2) für optische Phononen!

Einfache klassische Motivation:

Maxwellgl.:

(i) $\nabla\times\underline{B} = \frac{1}{c^2}\dot{\underline{E}} + \mu_0\,\dot{\underline{P}}$ (ii) $\nabla\times\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$

Einfache Materialgl. - harm. Oszillator:

(iii) $\ddot{\underline{P}} + \omega_0^2\,\underline{P} = \chi\,\varepsilon_0\,\underline{E}$ ⟸ Treibender Term

Nehmen wir jetzt Fourierentwicklung

$E_x = E_{x0}\, e^{ikz-i\omega t}$ $B_y = B_{y0}\, e^{ikz-i\omega t}$

$P_x = P_{x0}\, e^{ikz-i\omega t}$

Setzen wir dies in die Materialgl. ein:

(i) $\frac{\omega}{c^2} E_{x,0} + \omega \mu_0 P_{x,0} - k B_{y,0} = 0$

(ii) $k E_x - \omega B_y = 0$

(iii) $\chi \varepsilon_0 E_x + (\omega^2 - \omega_0^2) P_x = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega}{c^2} & \omega\mu_0 & -k \\ k & 0 & -\omega \\ \chi\varepsilon_0 & \omega^2-\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ P_x \\ B_y \end{pmatrix} = 0$$

Die Determinante ergibt:

$$\| \omega^4 - \omega^2(\omega_0^2 + \chi + c^2k^2) + \omega_0^2 c^2 k^2 = 0 \|$$ Dispersionsrelation..

$\Rightarrow$ QM

Das Photonenfeld ist (Vektorpotential quantisiert)

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \sum_{k\sigma} A_{\underline{k}\sigma} (c_{k\sigma} + c^\dagger_{-\underline{k}\sigma}) e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$\sigma \in$ Polarisationsrichtung.

Wir betrachten jetzt vorrangig TO-Phononfeld.

$$H = \underbrace{\sum_k (E_{Ph,\underline{k}}\, c^\dagger_{\underline{k}} c_{\underline{k}})}_{\text{Photon}} + \underbrace{\sum_{\underline{k}} (E_{Pol,\underline{k}}\, b^\dagger_{\underline{k}} b_{\underline{k}})}_{\text{Polarisation, also Phonon, Exziton.}}$$

$+$ Kopplungsterme.

Die Kopplung mit dem Dipolfeld hat die Form $\underline{E} \cdot \underline{P}$

[Begründung nur so bekommt man aus dem Hamiltonoperator die P verbindenden Terme in $\nabla \cdot \underline{E} \propto \nabla \cdot \underline{P} + \underline{\rho}$!

$\underline{E} \propto -(c_k - c^\dagger_{-k})$ wegen $E \propto -\dot{\underline{A}}$

Erinnerung $\underline{P}_\perp \propto (b_k + b^\dagger_{\underline{k}})$

Damit muß die Form so sein:

$$H_{Kopplung} = \sum_k E_{Kopplung,\underline{k}} (c^\dagger_{\underline{k}} b_{\underline{k}} - c_{\underline{k}} b^\dagger_{\underline{k}} - c_{\underline{k}} b_{-\underline{k}} + c^\dagger_{-\underline{k}} b^\dagger_k) \quad \otimes$$

Die Kopplung stört, wir wollen wieder eine Form in der ungekoppelten Oszillatoren verkommen!

<u>Ansatz</u>: (Hopfield Transformation) (Analogie zur Supraleitung)

$$\alpha_{\underline{k}} = w\, c_{\underline{k}} + x\, b_{\underline{k}} + y\, c^+_{\underline{k}} + z\, b^+_{-\underline{k}} \qquad (xx)$$

<u>Wunsch</u>:

$$H = \sum_{\underline{k}} \left[E_{k,1}\, \alpha^+_{1k}\, \alpha_{1k} + E_{k,2}\, \alpha^+_{2k}\, \alpha_{2k} \right]$$

Diese Form wäre schön.

Wenn H die Form hätte:

$$[\alpha_{k,i}, H] = E_{k,1}\, \alpha_{k,i}$$

Wir kombinieren jetzt (x) und (xx)

$$[\alpha_{k,i}, H_0]_- = w\, E_{ph,k}\, c_{\underline{k}} + x\, E_{phon,k}\, b_k - y\, E_{ph,k}\, c^+_k - z\, E_{phon,k}\, b^+_{-k}$$

$$[\alpha_k, H_{coup}]_- = w\, E_{kopp,k}\, b_k - x\, E_{kopp,k}\, c_k - E_{kopp,k}\, b^+_k + z\, E_{kopp,k}\, c^+_{-k}$$

$$E_k (w\, c_k + x\, b_k + y\, c^+_k + z\, b^+_{-k}) = E_k\, \alpha_k$$

$$\begin{array}{c} c_k \\ b_k \\ c^+_{-k} \\ b^+_{-k} \end{array} \begin{pmatrix} E_{ph,k}-E_k & -E_{kopp,k} & 0 & E_{kopp,k} \\ E_{kopp,k} & E_{phon,k}-E_k & E_{kopp,k} & 0 \\ 0 & E_{kopp,k} & -E_{ph,k}-E_k & E_{kopp,k} \\ E_{kopp,k} & 0 & -E_{kopp} & -E_{phon,k}-E_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{cccc} c_k & b_k & c^+_{-k} & b^+_{-k} \end{array}$$

Das ist nur erfüllt wenn die Determinante verschwindet:

$$(E_k)^4 - (E_k)^2 \left(E_{ph,k}^2 + E_{phon,k}^2\right) + E_{ph,k}^2\, E_{phon,k}^2 + 4\, E_{ph,k}\, E_{phon,k}\, E_{kopp,k}^2 = 0$$

↑ Mit Hilfe dieser Gleichung kann die Energie des Polaritons E_k berechnet werden.

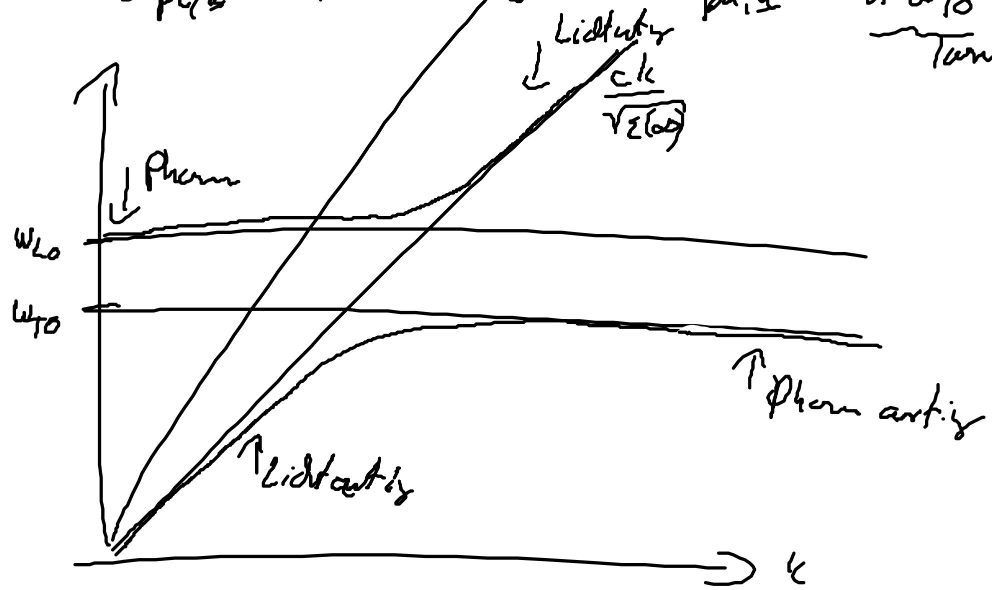
Mit der Gleichung kann parallel w, x, y, z bestimmt werden.

Für unser Beispiel:

<u>Photonen</u> <u>TO-Phonon</u>

$E_{Pt,k} = \hbar c k$ $\quad$ $E_{Ph,k} = \hbar \omega_{TO}$

[illegible]



1) Die Wechselwirkung zwischen Phononen und Photonen führt zur Ausbildung neuer bosonischer Teilchen, den Polaritonen

z. B. Photon-TO Phonon-Polaritonen.

Diese Teilchen sind wieder Bosonen $[\alpha_k, \alpha_{k'}^{+}] = \delta_{k,k'}$

man muß dann Randbedingungen für x, y, z, w erfüllen.

2) Es bilden sich zwei Zweige heraus,

der erste Zweig ist zunächst Photonartig und dann Phononartig

der zweite Zweig ist: Erst Phononartig und dann Photonartig.