

### 3. Zeeman effekt: statische magn. Felder (ohne Spin)

- Frage: Beim Anlegen eines stat. magn. Feldes an ein Atom, wie verändert sich das Energiespektrum und wie kann es mit optischer Spektroskopie nachgewiesen werden?

• Hamiltonian:  $\underline{H} = \underline{H}_{\text{Atom}} + \underline{W}$

$$\underline{W} = -\underline{\mu} \cdot \underline{B} = -\mu_z B_z = -\frac{q}{2} (\underline{r} \times \dot{\underline{r}})_z B_z$$

$$\underline{W} = -\frac{q}{2m} \underline{L}_z B_z$$

wissen!  $\underline{L}_z = \frac{\hbar}{i} \partial_\varphi$  vertauscht mit  $\underline{H}_{\text{Atom}} = H_1(r) + H_2(\underline{L}^2)$

→  $\underline{L}_z$  und  $\underline{H}_{\text{Atom}}$  haben einen gemeinsamen Satz

von Eigenfkt:  $Y_{l m_l}$  mit  $L_z Y_{l m_l} = \hbar m_l Y_{l m_l}$

→ damit sind die Energie-Eigenwerte im Magnetfeld bekannt:

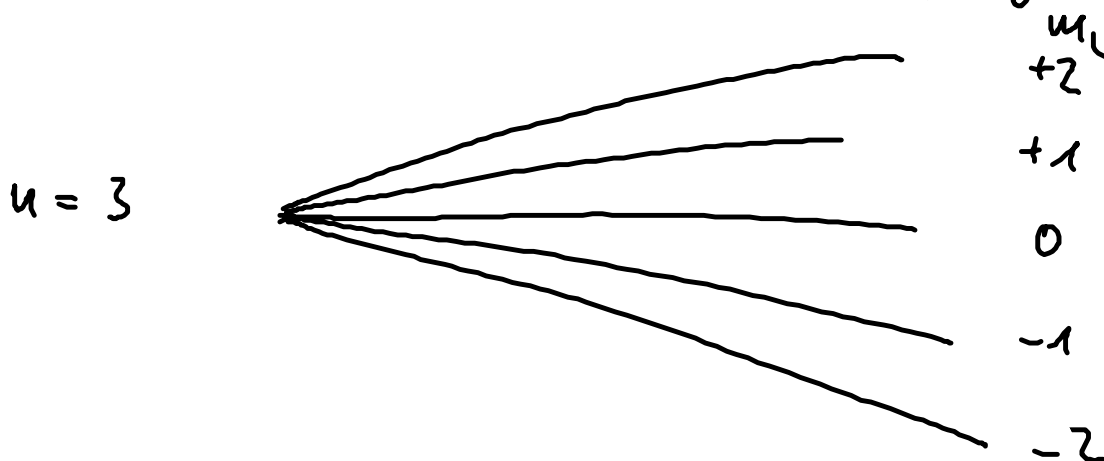
$$\begin{aligned} \hat{H} Y_{l m_l}(\vartheta, \varphi) R_{nl}(r) &= \underbrace{\hat{H}_{\text{Atom}} Y_{l m_l} R_{nl}} + \frac{e}{2m} B_z L_z Y_{l m_l} R_{nl} \\ &= \left( \varepsilon_n + \underbrace{\frac{e \hbar}{2m} B_z m_l}_{\mu_B} \right) Y_{l m_l} R_{nl} \end{aligned}$$

$\mu_B$  - „Bohrsche Magneton“

→ offensichtlich wird die Entartung bzgl.  $m_l$  im Magnetfeld aufgehoben, denn

$$E = E(n, m_l)$$

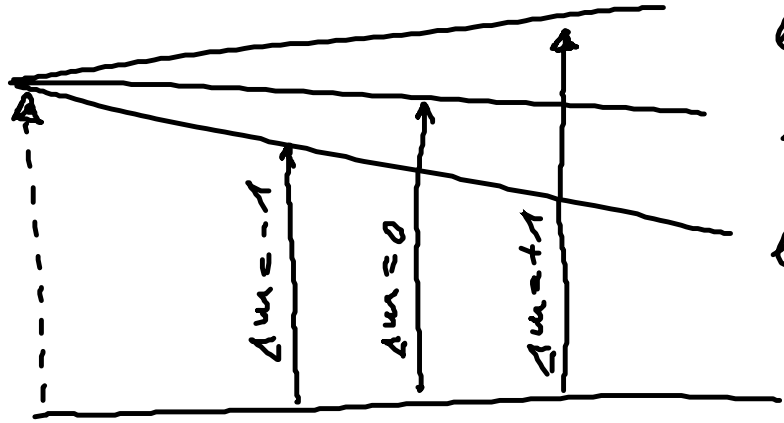
• Lage der E-Niveaus + opt. Übergänge



$$u = 2$$

$$l = 0, 1$$

$$m_l = -1, 0, 1$$



$$l = 1, m_l = 1$$

$$l = 0, 1, m_l = 0$$

$$l = 1, m_l = -1$$

opt. Auswahlregel:  
 $\Delta l = 1$   
 $\Delta m = 0, 1$

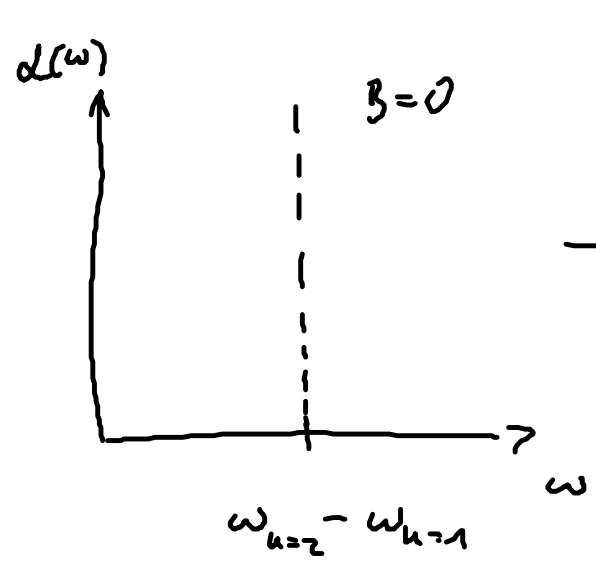
$$u = 1$$

$$l > 0$$

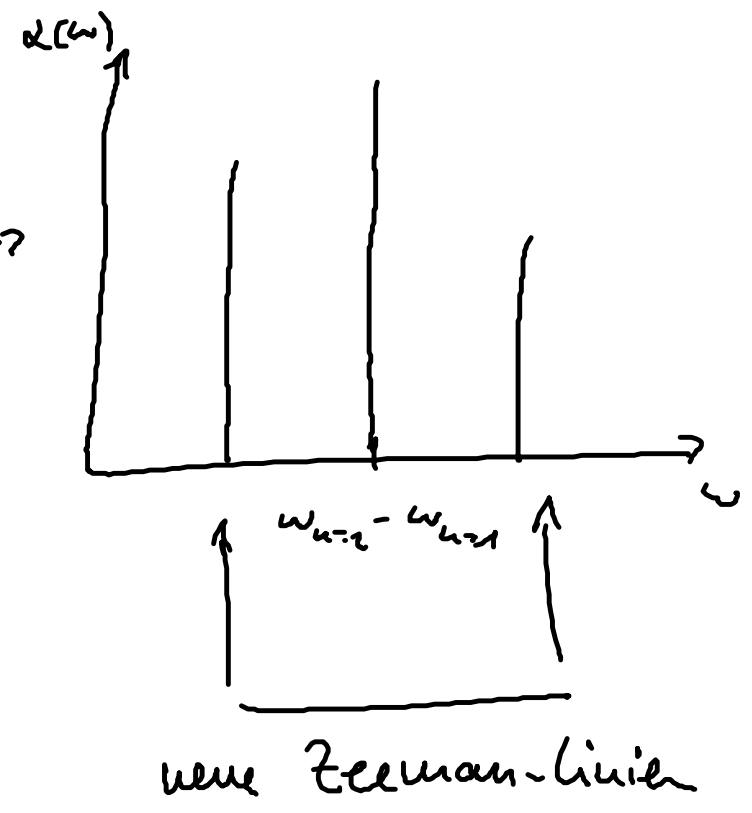
$$m_l = 0$$

$B_z = 0$   $\longrightarrow$   $B_z \neq 0$

Damit entsteht im opt. Spektrum ein Triplett!



$\longrightarrow$



• Bemerkungen:

- (i) Die Aufspaltung der Linien bei der nur der Bahndrehimpuls  $\vec{l}$  mit verschiedenen  $m_l$  auftritt heißt „normaler Zeeman-Effekt“

Spielt im Atom mit abgesättigten Spin eine Rolle

- (ii) Im Allgem. muß der Spin des Elektrons berücksichtigt werden, insbesondere beim H-Atom: „anomalen Zeeman effekt“

#### 4. Stark effekt: stat. elektrische Felder

- Frage: Beim Anlegen eines statischen elektrischen Feldes an ein Atom, wie verändert sich das E-Spektrum und wie kann es durch opt. Spektroskopie nachgewiesen werden?

• Hamiltonian:  $\underline{H} = \underline{H}_{\text{Atom}} + \underline{W}$

$$\underline{W} = -\vec{d} \cdot \vec{E}, \quad \vec{d} = q\vec{r}, \quad \vec{E} = \text{const.}$$

→ hier sind keine Eigenfkt. bekannt

(alternative Lsg. gesucht für Zweiniveausystem (ZNS))

H-Atom: lineare SE (Balmerserie)  $\Delta E \sim E$

andere Atome: quadr. SE  $\Delta E \sim E^2$

Hier nur für geringe Feldstärken.

- wichtiges aktuelles Gebiet:
  - hohe Feldstärken
  - Attosekunden Laserpulse

## 4.1 Zeitunabhängige Störung für ZNS

• Annahme:  $\underline{W}$  unabhängig von Zeit  $t$

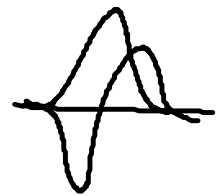
• Ansatz:  $\Psi(r, t) = \sum_{i=1}^2 c_i(t) \varphi_i(r)$   
mit  $c_i(t) = c_i e^{i E_i / \hbar t}$

$E$  - Energie des gestörten Systems denn  $\underline{H} \Psi = E \Psi$

$$E = \varepsilon_1 c_1 + W_{11} c_1 + W_{12} c_2$$

$$E = \varepsilon_2 c_2 + W_{22} c_2 + W_{21} c_1$$

$$W_{ij} = \int d^3r \varphi_i^*(r) \underbrace{W}_{-\vec{d} \cdot \vec{r}} \varphi_j(r)$$



$$\rightarrow W_{ii} = 0$$
$$W_{ij} \neq 0$$

• Matrixform:

$$\begin{pmatrix} E - \varepsilon_1 - W_{11} & -W_{12} \\ -W_{21} & E - \varepsilon_2 - W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

(a) Berechnung der Energie

$$(E - \varepsilon_1 - W_{11})(E - \varepsilon_2 - W_{22}) - |W_{12}|^2 = 0$$

$$E^2 - (\varepsilon_1 + W_{11} + \varepsilon_2 + W_{22})E + (\varepsilon_1 + W_{11})(\varepsilon_2 + W_{22}) - |W_{12}|^2 = 0$$

$$\begin{aligned} E_{\pm} &= \frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2}{2} \pm \left[ \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2}{2} \right)^2 - \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 + |W_{12}|^2 \right]^{1/2} \\ &= \frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2}{2} \pm \frac{1}{2} \left[ (\tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2)^2 + 4|W_{12}|^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

• Bemerkung:

(i) Die Diagonalelemente der WW  $W_{11}$  und  $W_{22}$  können immer in die Energien der ungestörten Niveaus  $\varepsilon_i$  eingebaut werden:

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + W_{ii} \quad (\varepsilon\text{-Renormierung})$$

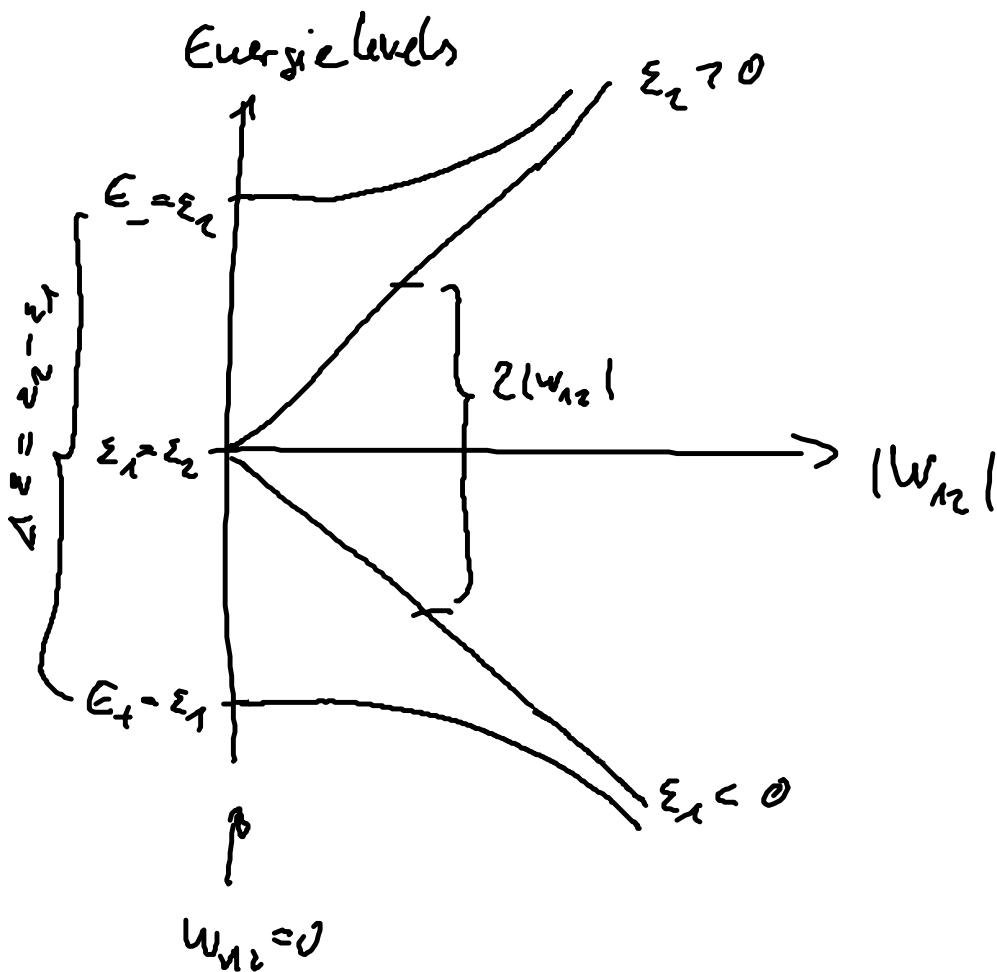
(ii) weitere Diskussion für  $W_{ii} = 0$ . Verschied. Fälle

(a) Wir schalten ein externes E-Feld ein und erhöhen die Feldstärke  $\rightarrow$   $W_{12}$  durchfahren.  
 ZNS bleibt unberührt, seine ungestörten Energien sind

- entartet:  $\epsilon_1 - \epsilon_2 = 0$  — —

- nicht entartet:  $\epsilon_1 - \epsilon_2 \neq 0$  —  
 —

$$E_{\pm} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \pm \frac{1}{2} \left[ (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + 4 |W_{12}|^2 \right]^{1/2}$$



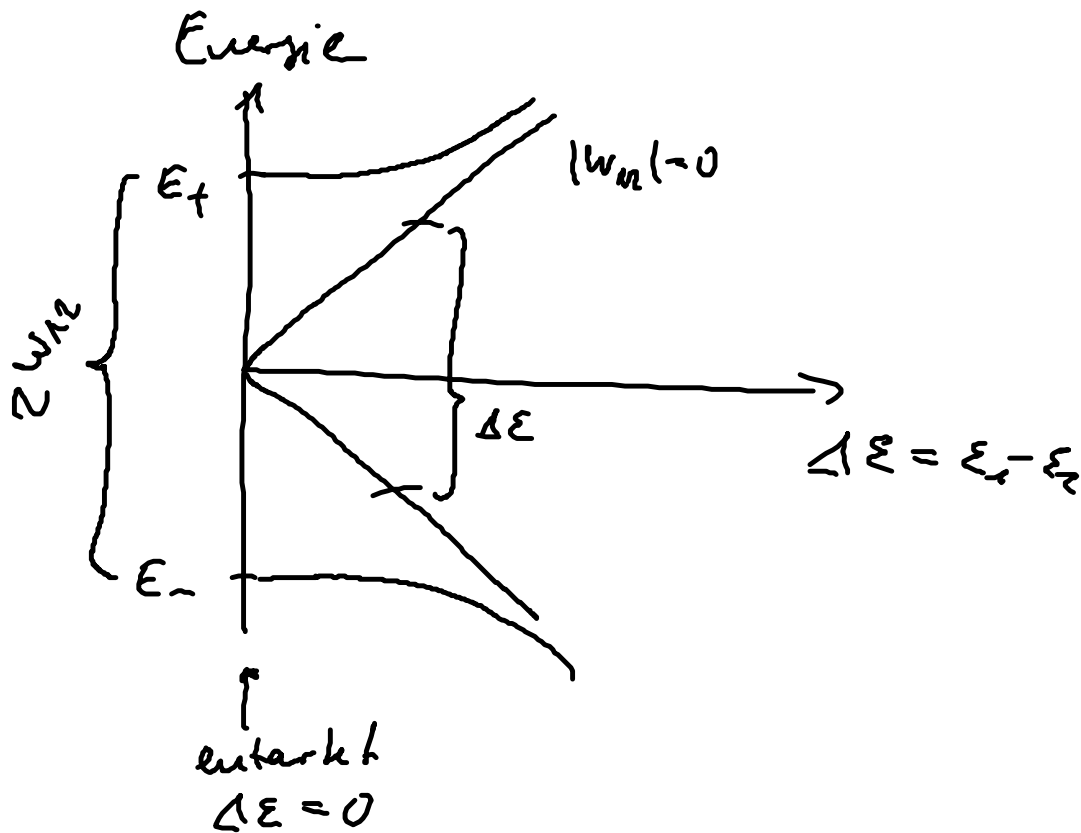
(b) Wir legen ein konstantes E-Feld an.

Der Energieabstand  $\Delta E = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$  des ZNS wird durch getuned.

- keine WW ( $E=0$ ) :  $W_{12} = 0$

- WW ( $E \neq 0$ ) :  $W_{12} \neq 0$

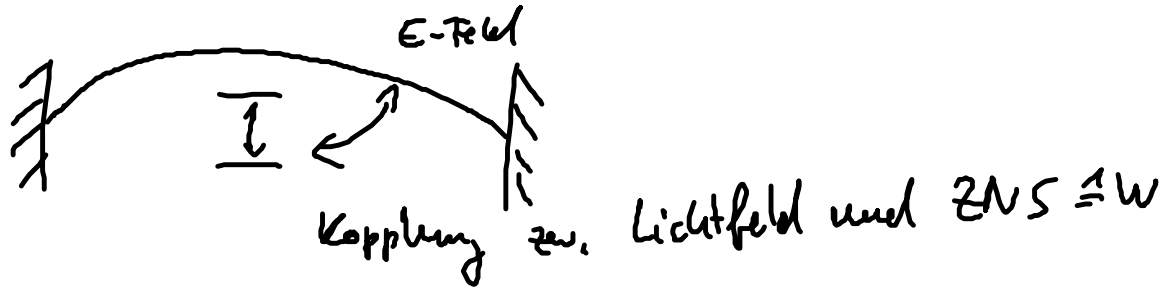
$$E_{\pm} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \frac{1}{2} \left[ \underline{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} + 4|W_{12}|^2 \right]^{1/2}$$



Ist typ. Exp. in der Quantenoptik

(i) ZNS in Resonator (Kavität)





- (ii) ZNS erfährt eine Wv durch Kopplung an das Photonfeld der Kavität (Dipolmoment)
- (iii) Man kann das Dipolmoment schwierig ändern, aber man kann <sup>↑</sup> und Photonmode die Temp. erhöhen, das vergrößert  $\Delta E$

• Bemerkung:

Für entartete Zustände hebt die Störung (ext. Feld)

$W_{12}$  die Entartung auf  $|E_+ - E_-| = 2(W_{12})$

Energielevels werden „abgestossen“ = „anticrossing“

Wenn man (a) die Stärke der Störung erhöht

(b) das  $\Delta E$  Splitting bei  $W_{12} = \text{const!}$  durchgeführt

(c) Störungstheorie  $W_{12}$  klein gegen  $\Delta E$

$$E_{\pm} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sqrt{1 + \frac{4|W_{12}|^2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}}$$

kleine Größe

Taylor

$$\approx \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{4|W_{12}|^2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} \right)$$

(1+x)

$$E_{\pm} = \begin{cases} \varepsilon_1 + \frac{|W_{12}|^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \varepsilon_1 - \frac{|W_{12}|^2}{\Delta\varepsilon} \\ \varepsilon_2 - \frac{|W_{12}|^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \varepsilon_2 - \frac{|W_{12}|^2}{\Delta\varepsilon} \end{cases}$$

Korrektur der ungestörten Energien  $\varepsilon_i$  durch  $W_{12}$ .

## (6) Berechnung der Wellenfunktion

Zu den neuen Eigenenergien  $E_{\pm}$  des gestörten Systems  $H_{\text{Atom}} + W$  gehören auch neue Eigenfunktionen

• einfacher Ansatz:

Die neuen Zustände lassen sich aus den freien, ungestörten Eigenfunktionen des  $H_{\text{Atom}}$  bilden

$$\psi_{\pm}(\mathbf{r}) = \cos\{\varphi\} \varphi_1(\mathbf{r}) + \sin\{\varphi\} \varphi_2(\mathbf{r})$$

$$\psi_{\pm}(r) = -\sin\{\theta\} \varphi_1(r) + \cos\{\theta\} \varphi_2(r)$$

Damit sind  $\psi_{\pm}$  normiert und  $\perp$  aufeinander:

$$\int d^3r \psi_{\pm}^*(r) \psi_{\pm}(r) = \cos^2\{\theta\} \underbrace{\int d^3r \varphi_1^*(r) \varphi_1(r)}_{=1} + \sin^2\{\theta\} \underbrace{\int d^3r \varphi_2^*(r) \varphi_2(r)}_{=1} = \underline{\underline{1}}$$

• Anwenden von  $\underline{H} = \underline{H}_{\text{kin}} + \underline{W}$  :  $\underline{H} \psi_{\pm}(r) = E_{\pm} \psi_{\pm}(r)$

(#)

$$\cos\{\theta\} \varepsilon_1 \varphi_1 + \sin\{\theta\} \varepsilon_2 \varphi_2 + \cos\{\theta\} \underline{W} \varphi_1 + \sin\{\theta\} \underline{W} \varphi_2 = E_{\pm} \cos\{\theta\} \varphi_1 + E_{\pm} \sin\{\theta\} \varphi_2$$

(i)  $\int d^3r \varphi_1^*(r) \cdot$  (#)

$$\Rightarrow \cos\{\theta\} (\varepsilon_1 + W_{11}) + \sin\{\theta\} W_{12} = E_{\pm} \cos\{\theta\}$$

(ii)  $\int d^3r \varphi_2^*(r) \cdot$  (#)

$$\Rightarrow \sin\{\theta\} (\varepsilon_2 + W_{22}) + \cos\{\theta\} W_{21} = E_{\pm} \sin\{\theta\}$$

I  $(E_{\pm} - \tilde{\varepsilon}_1) \cos\{\theta\} = \sin\{\theta\} W_{12}$  ← einsetzen

II  $(E_{\pm} - \tilde{\varepsilon}_2) \sin\{\theta\} = \cos\{\theta\} W_{21} \Rightarrow E_{\pm} = \tilde{\varepsilon}_2 + W_{21} \cot\{\theta\}$

$$\Rightarrow \tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_1 + W_{21} \cot\{\theta\} = W_{12} \tan\{\theta\}$$

Für  $\underline{W} = \underline{d} \cdot \underline{E}$  gilt:  $W_{11} = 0$  und  $W_{12} = W_{21} = \text{reell}$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = W_{12} (\tan \zeta - \cot \zeta) \\ = -2W_{12} \cot(2\zeta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(2\zeta) = \frac{2W_{12}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}}$$

(i) entartet System  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  — —

$$\tan(2\zeta) = \infty \Rightarrow 2\zeta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \zeta = \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\Psi_{\pm}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_2(r) \pm \varphi_1(r))}$$

→ die neuen Eigenzustände des Atoms unter Einfluss eines stat. E-Feldes werden komplette „Durchmischung“ (Hybridisierung) der Zustände gebildet.  
alten ungestörten

(ii) nicht entartet  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  — (Störungstheorie)

Annahme: Stärke der WW klein gegenüber  $\Delta\varepsilon$

$$W_{12} \ll \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rightarrow 2\zeta = \frac{2W_{12}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \Rightarrow \zeta = \frac{W_{12}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \ll 1$$

→  $\cos \zeta$  und  $\sin \zeta$  Taylorentwickeln

. Zustände:

$$\begin{aligned}\psi_+(r) &= \varphi_1(r) + \frac{W_{12}}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \varphi_2(r) \\ \psi_-(r) &= \varphi_2(r) - \frac{W_{12}}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \varphi_1(r)\end{aligned}$$

→ nur eine „Beimischung“