

3. Zeeman effekt: statische magn. Felder (ohne Spin)

- Frage: Beim Anlegen eines stat. magn. Feldes an ein Atom, wie verändert sich das Energiespektrum und wie kann es mit optischer Spektroskopie nachgewiesen werden?

• Hamiltonian: $\underline{H} = \underline{H}_{\text{Atom}} + \underline{W}$

$$\underline{W} = -\underline{\mu} \cdot \underline{B} = -\mu_B B_z = -\frac{q}{2} (\underline{r} \times \underline{p})_z B_z$$

$$\underline{W} = -\frac{q}{2m} \underline{L}_z B_z$$

wissen: $\underline{L}_z = \frac{\hbar}{i} \partial_\varphi$ vertauscht mit $\underline{H}_{\text{Atom}} = H_1(r) + H_2(\underline{L}^2)$

→ \underline{L}_z und $\underline{H}_{\text{Atom}}$ haben einen gemeinsamen Satz

Von Eigenfkt: Y_{lm} mit $L_z Y_{lm} = m \hbar Y_{lm}$

→ damit sind die Energie-Eigenwerte im Magnetfeld bekannt:

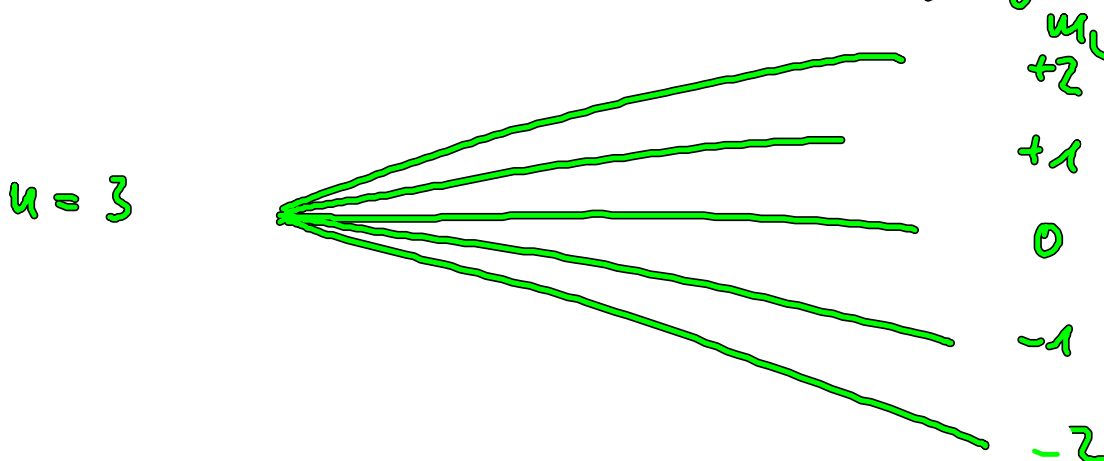
$$\begin{aligned} \hat{H} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) R_{nl}(r) &= \underbrace{\hat{H}_{Atom} Y_{lm} R_{nl}} + \frac{e}{2m} B_z L_z Y_{lm} R_{nl} \\ &= \left(\epsilon_n + \underbrace{\frac{e \hbar}{2m} B_z m_l}_{\mu_B} \right) Y_{lm} R_{nl} \end{aligned}$$

μ_B - „Bohrsche Magneton“

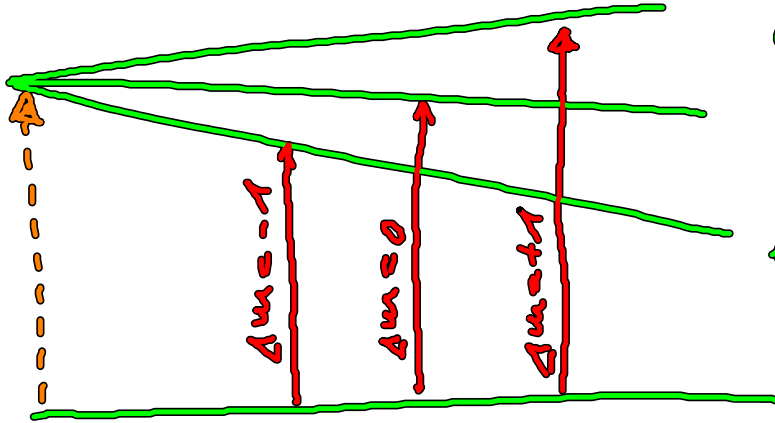
→ offensichtlich wird die Entartung bzgl. m_l im Magnetfeld aufgehoben, denn

$$E = E(n, m_l)$$

• Lage der E-Niveaus + opt. Übergänge



$$\begin{aligned}
 u &= 2 \\
 l &= 0, 1 \\
 m_l &= -1, 0, 1
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 l &= 1, m_l = 1 \\
 l &= 0, m_l = 0 \\
 l &= 1, m_l = -1
 \end{aligned}$$

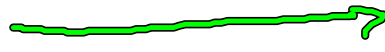
opt. Auswahlregeln:

$$\Delta l = 1$$

$$\Delta m_l = 0, \pm 1$$

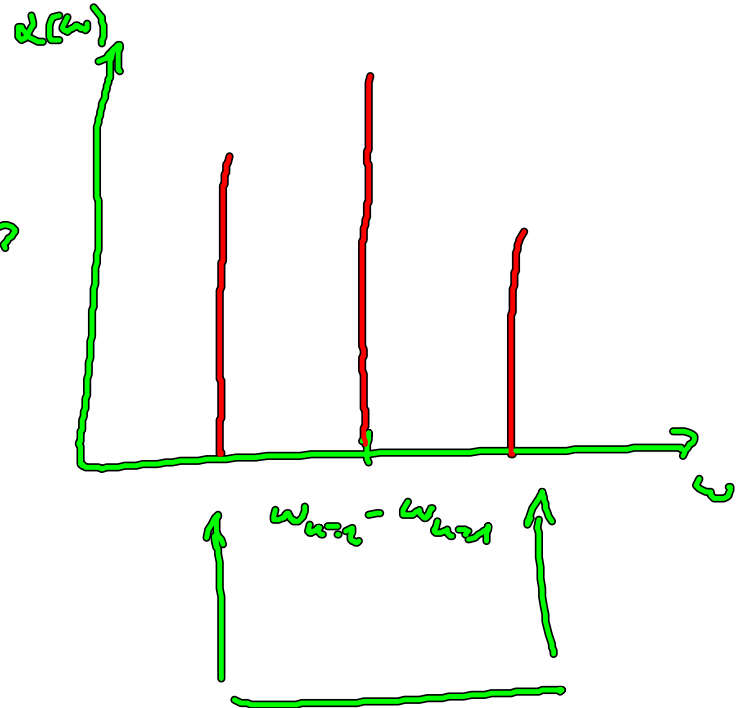
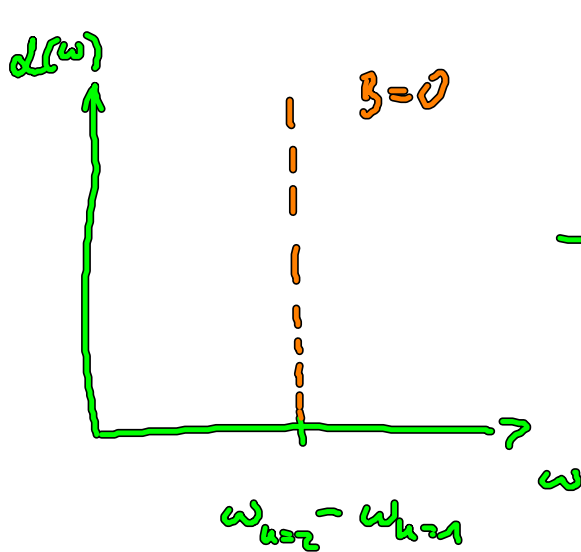
$$\begin{aligned}
 u &= 1 \\
 l &\geq 0 \\
 m_l &= 0
 \end{aligned}$$

$$B_z = 0$$



$$B_z \neq 0$$

Damit entsteht im opt. Spektrum ein Triplett:



neue Zeeman-Linien

• Bemerkungen:

- (i) Die Aufspaltung der Linien bei der nur der Bahndrehimpuls \vec{L} mit verschiedenen m_l auftritt heißt „normaler Zeeman-Effekt“

Spielt im Atom mit abgesättigten Spin eine Rolle

- (ii) Im Allgem. muß der Spin des Elektrons berücksichtigt werden, insbesondere beim H-Atom: „anomalen Zeeman-Effekt“

4. Stark-Effekt: stat. elektrische Felder

- Frage: Beim Anlegen eines statischen elektrischen Feldes an ein Atom, wie verändert sich das E-Spektrum und wie kann es durch opt. Spektroskopie nachgewiesen werden?

• Hamiltonian: $\underline{H} = \underline{H}_{\text{Atom}} + \underline{W}$

$$\underline{W} = -\vec{d} \cdot \vec{E}, \quad \vec{d} = q\vec{r}, \quad \vec{E} = \text{const.}$$

→ hier sind keine Eigenfkt. bekannt

(alternative Lsg. gesucht für Zweiniveausystem (ZNS))

H-Atom: lineare SE (Balmerserie) $\Delta E \sim E$

andere Atome: quadr. SE $\Delta E \sim E^2$

Hier nur für geringe Feldstärken.

- wichtiges aktuelles Gebiet:
 - hohe Feldstärken
 - Attosekunden Laserpulse

4.1 Zeitunabhängige Störung für ZNS

• Annahme: \underline{W} unabhängig von Zeit t

• Ansatz: $\Psi(\underline{r}, t) = \sum_{i=1}^2 c_i(t) \varphi_i(\underline{r})$

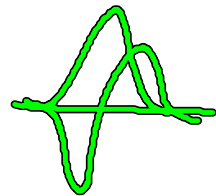
mit $c_i(t) = c_i e^{i \frac{E_i}{\hbar} t}$

E - Energie des gestörten Systems denn $\underline{H} \Psi = E \Psi$

$$E = \varepsilon_1 c_1 + W_{11} c_1 + W_{12} c_2$$

$$E = \varepsilon_2 c_2 + W_{22} c_2 + W_{21} c_1$$

$$W_{ij} = \int d^3r \varphi_i^*(\underline{r}) \underbrace{\underline{W}}_{-\underline{d} \cdot \vec{E}} \varphi_j(\underline{r})$$



$$\rightarrow W_{ii} = 0$$

$$W_{ij} \neq 0$$

• Matrixform:

$$\begin{pmatrix} E - \varepsilon_1 - W_{11} & -W_{12} \\ -W_{21} & E - \varepsilon_2 - W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

(a) Berechnung der Energie

$$(E - \varepsilon_1 - W_{11})(E - \varepsilon_2 - W_{22}) - |W_{12}|^2 = 0$$

$$E^2 - (\varepsilon_1 + W_{11} + \varepsilon_2 + W_{22})E + (\varepsilon_1 + W_{11})(\varepsilon_2 + W_{22}) - |W_{12}|^2 = 0$$

$$E_{\pm} = \frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2}{2} \pm \left[\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2}{2} \right)^2 - \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 + |W_{12}|^2 \right]^{1/2}$$

$$= \frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2}{2} \pm \frac{1}{2} \left[(\tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2)^2 + 4|W_{12}|^2 \right]^{1/2}$$

• Bemerkung:

(i) Die Diagonalelemente der WW W_{11} und W_{22} können immer in die Energien der ungestörten Niveaus ε_i eingebaut werden:

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + W_{ii} \quad (\varepsilon\text{-Renormierung})$$

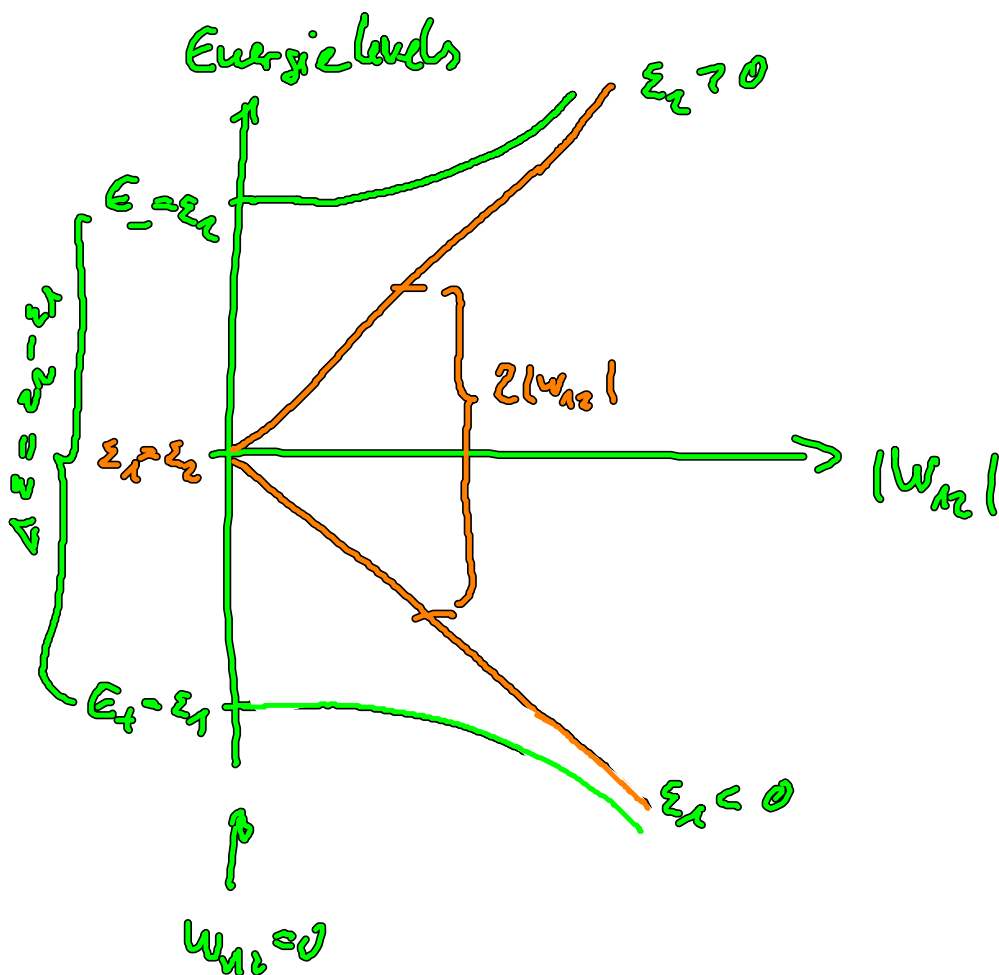
(ii) weitere Diskussion für $W_{ii} = 0$. Verschied. Fälle

(a) Wir schalten ein externes E-Feld ein und erhöhen die Feldstärke \rightarrow W_{12} durchfahren.
 ZNS bleibt unberührt, seine ungestörten Energien sind

- entartet: $\epsilon_1 - \epsilon_2 = 0$ — —

- nicht entartet: $\epsilon_1 - \epsilon_2 \neq 0$ — —

$$E_{\pm} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \pm \frac{1}{2} \left[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + 4 |W_{12}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$



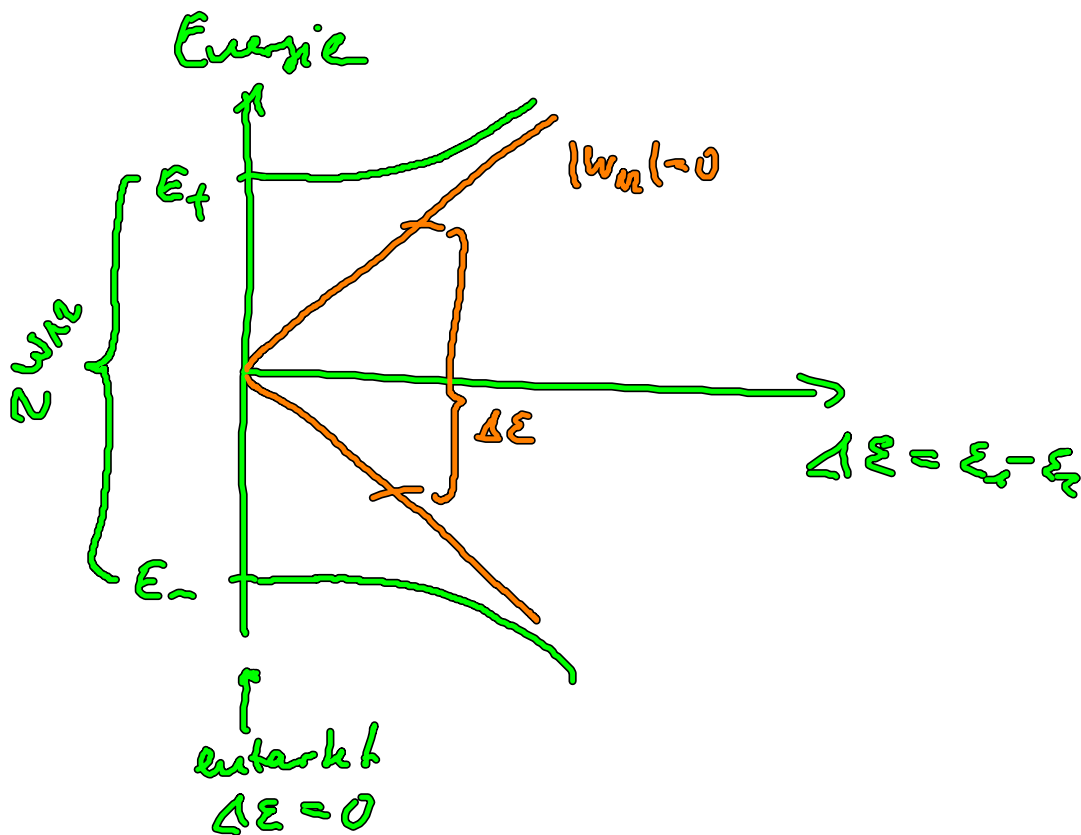
(b) Wir legen ein konstantes E-Feld an.

Der Energieabstand $\Delta E = \epsilon_2 - \epsilon_1$ des ZNS wird durch getuned.

- keine WW ($E=0$) : $W_{12} = 0$

- WW ($E \neq 0$) : $W_{12} \neq 0$

$$E_{\pm} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \pm \frac{1}{2} \left[(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2 + 4|W_{12}|^2 \right]^{1/2}$$



Ist typ. Exp. in der Quantenoptik

(i) ZNS in Resonator (Kavität)



(ii) ZNS erfährt eine Wv durch Kopplung an das Photonfeld der Kavität (Dipolmoment)

(iii) Man kann das Dipolmoment schwierig ändern, aber man kann \uparrow und Photonmode die Temp. erhöhen, das vergrößert ΔE

• Bemerkung:

Für entartete Zustände hebt die Störung (ext. Feld)

W_{12} die Entartung auf $|E_+ - E_-| = 2(W_{12})$

Energielevels werden „abgestossen“ = „Anticrossing“

Wenn man (a) die Stärke der Störung erhöht

(b) das ΔE Splitting bei $W_{12} = \text{const}$ ändert!

(c) Störungstheorie W_{12} klein gegen ΔE

$$E_{\pm} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sqrt{1 + \frac{4|W_{12}|^2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}}$$

kleine Größe

Taylor

$$\approx \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{4|W_{12}|^2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} \right)$$

(1+x)

$$E_{\pm} = \begin{cases} \varepsilon_1 + \frac{|W_{12}|^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \varepsilon_1 - \frac{|W_{12}|^2}{\Delta\varepsilon} \\ \varepsilon_2 - \frac{|W_{12}|^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \varepsilon_2 - \frac{|W_{12}|^2}{\Delta\varepsilon} \end{cases}$$

Korrektur der ungestörten Energien ε_i durch W_{12} .

(6) Berechnung der Wellenfunktion

Zu den neuen Eigenenergien E_{\pm} des gestörten Systems $H_{\text{Atom}} + W$ gehören auch neue Eigenfunktionen

• einfacher Ansatz:

Die neuen Zustände lassen sich aus den freien, ungestörten Eigenfunktionen des H_{Atom} bilden

$$\psi_{\pm}(\mathbf{r}) = \cos\{\varphi\} \varphi_1(\mathbf{r}) + \sin\{\varphi\} \varphi_2(\mathbf{r})$$

$$\psi_{\pm}(\mathbf{r}) = -\sin\{\theta\} \varphi_1(\mathbf{r}) + \cos\{\theta\} \varphi_2(\mathbf{r})$$

Damit sind ψ_{\pm} normiert und \perp aufeinander:

$$\int d^3r \psi_{\pm}^*(\mathbf{r}) \psi_{\pm}(\mathbf{r}) = \cos^2\{\theta\} \underbrace{\int d^3r \varphi_1^*(\mathbf{r}) \varphi_1(\mathbf{r})}_{=1} + \sin^2\{\theta\} \underbrace{\int d^3r \varphi_2^*(\mathbf{r}) \varphi_2(\mathbf{r})}_{=1} = \underline{\underline{1}}$$

• Anwenden von $\underline{H} = \underline{H}_{atom} + \underline{W}$: $\underline{H} \psi_{\pm}(\mathbf{r}) = E_{\pm} \psi_{\pm}(\mathbf{r})$

(#)

$$\cos\{\theta\} \varepsilon_1 \varphi_1 + \sin\{\theta\} \varepsilon_2 \varphi_2 + \cos\{\theta\} W \varphi_1 + \sin\{\theta\} W \varphi_2 = E_{\pm} \cos\{\theta\} \varphi_1 + E_{\pm} \sin\{\theta\} \varphi_2$$

(i) $\int d^3r \varphi_1^*(\mathbf{r}) \cdot$ (#)

$$\Rightarrow \cos\{\theta\} (\varepsilon_1 + W_{11}) + \sin\{\theta\} W_{12} = E_{\pm} \cos\{\theta\}$$

(ii) $\int d^3r \varphi_2^*(\mathbf{r}) \cdot$ (#)

$$\Rightarrow \sin\{\theta\} (\varepsilon_2 + W_{22}) + \cos\{\theta\} W_{21} = E_{\pm} \sin\{\theta\}$$

I $(E_{\pm} - \tilde{\varepsilon}_1) \cos\{\theta\} = \sin\{\theta\} W_{12}$

← einsetzen

II $(E_{\pm} - \tilde{\varepsilon}_2) \sin\{\theta\} = \cos\{\theta\} W_{21} \Rightarrow E_{\pm} = \tilde{\varepsilon}_2 + W_{21} \cot\{\theta\}$

$$\Rightarrow \tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_1 + W_{21} \cot\{\theta\} = W_{12} \tan\{\theta\}$$

Für $\underline{W} = \underline{d} \cdot \underline{E}$ gilt: $W_{11} = 0$ und $W_{12} = W_{21} = \text{reell}$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = W_{12} (\tan \xi - \cot \xi) \\ = -2W_{12} \cot(2\xi)$$

$$\Rightarrow \tan(2\xi) = \frac{2W_{12}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

(i) entartet System $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ — —

$$\tan(2\xi) = \infty \Rightarrow 2\xi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \xi = \frac{\pi}{4}$$

$$\Psi_{\pm}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_2(r) \pm \varphi_1(r))$$

→ die neuen Eigenzustände des Atoms unter Einfluss eines stat. E-Feldes werden komplette „Durchmischung“ (Hybridisierung) der Zustände gebildet.
alten ungestörten

(ii) nicht entartet $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ — (Störungstheorie)

• Annahme: Stärke der WW klein gegenüber $\Delta\varepsilon$

$$W_{12} \ll \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \Rightarrow 2\xi = \frac{2W_{12}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \Rightarrow \xi = \frac{W_{12}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \ll 1$$

→ $\cos \xi$ und $\sin \xi$ Taylorentwickeln

. Zustände:

$$\begin{aligned} \psi_+(r) &= \psi_1(r) + \frac{w_{12}}{E_1 - E_2} \psi_2(r) \\ \psi_-(r) &= \psi_2(r) - \frac{w_{12}}{E_1 - E_2} \psi_1(r) \end{aligned}$$

→ nur eine „Beimischung“