

1.4. Deterministisches Chaos

deterministisch aber ungeordnet

im Langzeitverhalten von Systemen mit $n \geq 3$ (autonom)

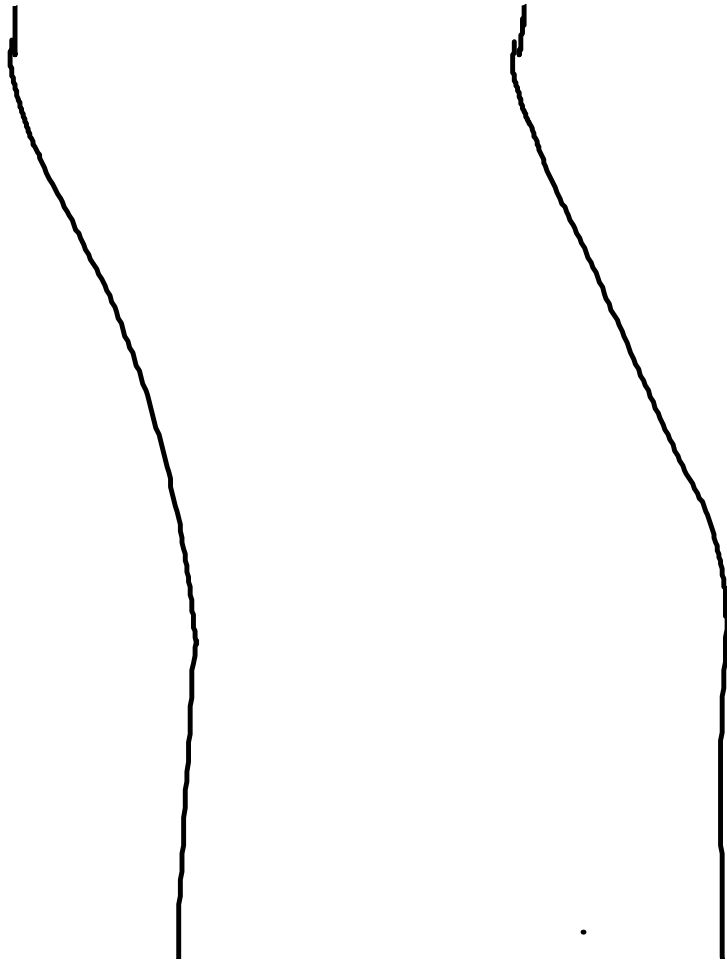
Seltener (chaotischer) Attraktor

Kriterien zur Klassifikation:

quasiperiod.	determinist. Chaos	stochastisch (Rauschen)
wenige dyn. Freiheitsgrade: niedrig-dim. Phasenraum		viele mikroskop. Freiheitsgrade (statist. Ensemble) $f \approx 10^{24}$
Attraktor: Torus T^d mit $d=2,3,4$	seltener Attraktor mit fraktale Dimension	

Autokorrelationsfunktion

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$$



periodisch in τ

$\rightarrow 0$ für $\tau \rightarrow \infty$

$= 0$ für $\tau \geq \tau_c$

• Fourierspektrum (spektrale Leistungsdichte)

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} dt$$

diskrete Frequenzen

$\omega_1, \omega_2, \dots$

breites Frequenzband

Instabilität der Bewegung
bei kleinen Störungen
der Anfangsbedingungen

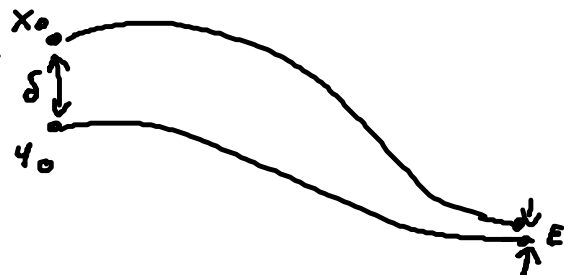
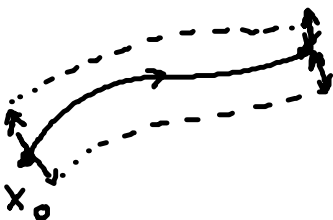
typisch universelle
Bifurkationszenarien

Def.: Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich
von den Anfangsbedingungen abhängt.

Quantitative Formulierung

der Stabilität geg. kleinen
Variationen der Anfangsbed.

Bahnstabilität



bahnstabil

(alle benachbarten Bahnen
bleiben in einer Röhre um $\phi(t, x_0)$)

asymptot. bahnstabil

(Abstand der benachbarten
Bahnen $\rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$)

Ljapunov / asymptot. stabil

für dasselbe t gilt

$$|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve $\phi(t, x_0)$

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}}_{A_{ik}(t)}(x(t), t) \delta x_k$$

formale Lösung: $\delta x(t) = e^{\int_0^t dt' A(t')} \delta x(0)$

Zeitentwicklung einer infinites. Kugel um x_0

\rightarrow n-dim. Ellipsoid mit Hauptachsen $p_k(t) \sim p_k(0) e^{\lambda_k t}$

Def.: Stabilität ist bestimmt durch die Ljapunov-Exponenten

$$\bar{\lambda}_k := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_k(t)}{p_k(0)}$$

NB: Führender (größter) Ljapunov-Exp.

$$\lambda := \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln |\underline{x}(t) - \underline{y}(t)|$$

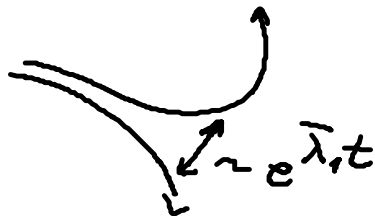
$$\Rightarrow |\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \sim e^{\lambda t}$$

$\lambda < 0$: kleine Abweichungen werden exponentiell ausgedämpft

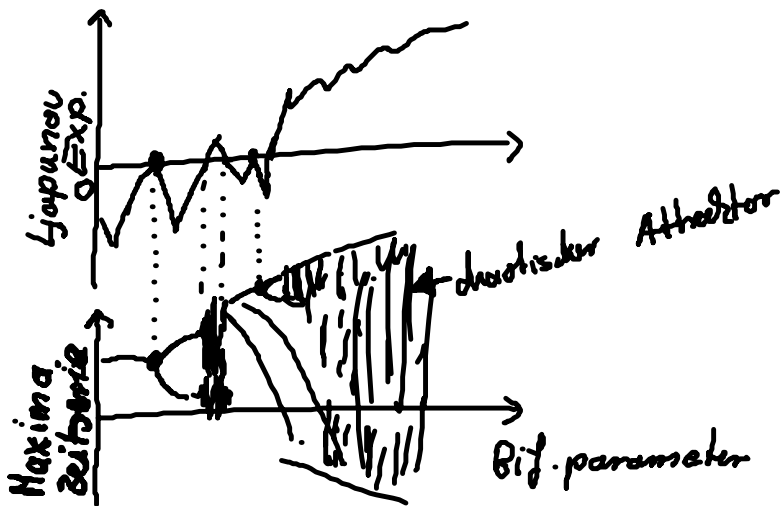
$\lambda > 0$: expon. Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen

$\hat{=}$ Kriterium für Chaos

(Bsp.) chaotischer Attraktor im \mathbb{R}^3 $\bar{\lambda}_1 > 0$, $\bar{\lambda}_2 = 0$, $\bar{\lambda}_3 < 0$
 instab. Bewegung Annäherung



(Bsp.) Modell einer Halbleiterstruktur (S. Bose et al. Physics Lett. A 195 (1994) 144)

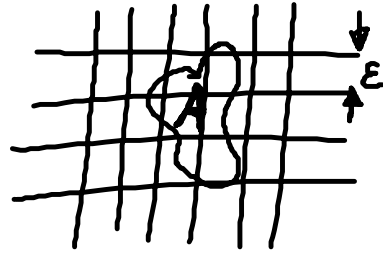


Quantitative Formulierung der fraktalen Dimension des seltsamen Attraktors

Verallgemeinerung des Dimensionsbegriffes:

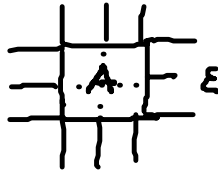
Hausdorff-Dimension einer Punktmenge A im \mathbb{R}^n

Sei $N(\varepsilon)$ die Mindestzahl von n -dim. Würfeln mit Seitenlänge ε , um A zu überdecken. Dann ist



$$d := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad \text{die fraktale (Hausdorff) Dimension}$$

Bsp. 1 Dimension eines Quadrates

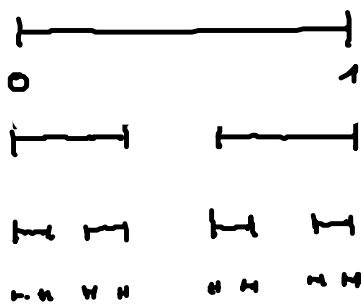


$\varepsilon = 1$	\rightarrow	$N(\varepsilon)$
		1
$\varepsilon = \frac{1}{2}$	\rightarrow	4
$\varepsilon = \frac{1}{3}$	\rightarrow	9
\vdots		\vdots
$\varepsilon = \frac{1}{n}$	\rightarrow	n^2

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n^2}{\ln n} = \underline{\underline{2}}$$

Bsp. 2 Cantormenge (selbstähnliche Struktur)

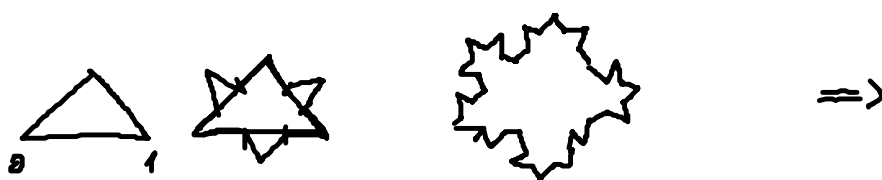
$N(\varepsilon)$



$$\begin{array}{l}
 \varepsilon = 1 \quad : \quad 1 \\
 \varepsilon = \frac{1}{3} \quad : \quad 2 \\
 \varepsilon = \frac{1}{9} \quad : \quad 4 \\
 \vdots \\
 \varepsilon = \frac{1}{3^n} \quad : \quad 2^n
 \end{array}$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309$$

Bsp 3 Koch's Kurve (Schneeflocke)



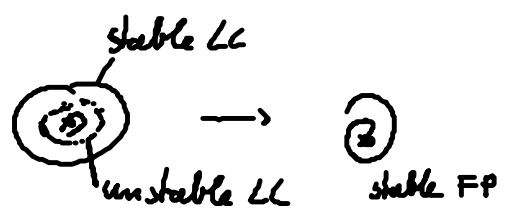
$$\begin{array}{cccc}
 \varepsilon = 1 & \varepsilon = \frac{1}{3} & \varepsilon = \frac{1}{9} & \dots \quad \varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
 N = 1 & N = 4 & N = 16 & N = 4^n
 \end{array}$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2618$$

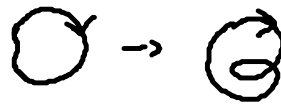
Zwischen Kurve und Fläche

Summary of last Tuesday -
- bifurcations of limit cycles

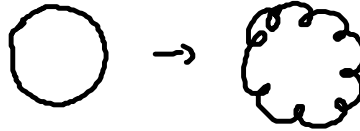
c1) fold bifurcation



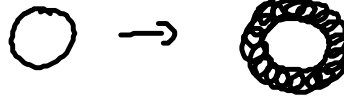
c2) period doubling
(flip)



c3) Neimark Sacker
(Hopf bifurcation
of LC)



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$$



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$$