English summary

2 Concepts of control

2.1 Open and closed loop control

schematics:

$\underline{u}$: control signal/variable

$\underline{x}$: dynamical variable

$\underline{y}$: output

model: $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})$, $\underline{x}(t_0)=\underline{x}_0$, $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{u}\in\mathbb{R}^m$

$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x},\underline{u})$, $\underline{y}\in\mathbb{R}^p$

Def: A (linear) system $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}$ with $\underline{x}(t_0)=\underline{x}_0$ and target state $\underline{x}_1$ is **completely controllable**, if there exists a controller $\underline{u}$ such that the system starting at any $\underline{x}_0$ reaches any $\underline{x}_1=\underline{x}(t_1)$ in finite time t_1.

Theorem: The following is equivalent:

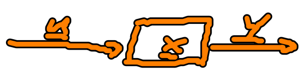
(i) The time-invariant system $\dot{\underline{x}}(t)=\underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t)+\underline{\underline{B}}\,\underline{u}(t)$ is completely controllable.

(ii) The controllability matrix $\underline{\underline{K}} = (\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}, \ldots, \underline{\underline{A}}^{n-1}\underline{\underline{B}})$ has rank n.

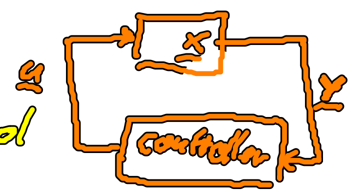
(iii) If $\underline{p}\neq 0$ is eigenvector of $\underline{\underline{A}}^T$, then $\underline{p}^T\underline{\underline{B}}\neq 0$.

(iv) $\operatorname{rank}(\lambda\mathbb{1}-\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{B}}) = n \quad \forall\lambda$

open-loop control



closed-loop control



2.2 Chaoskontrolle

Kriterien für Chaos:

- Lyapunov-Exponent positiv, lokale Instabilitäten bei globaler Begrenzung (seltsame Attraktoren)

- Nichtlinearitäten (lineare Systeme mit lokalen Instabilitäten sind nicht begrenzt)
- minimale Dimension = 3 (Überschneidungen von Trajektorien nicht erlaubt)
- sensitive Abhängigkeit gegenüber Anfangsbedingungen (Schmetterlingseffekt)
- wiederkehrende Trajektorien:

  $\forall \epsilon > 0 \ \exists T_\epsilon > 0 : \forall t \geq 0 \ \exists T(t,\epsilon)$ mit $0 < T(t,\epsilon) < T_\epsilon$:

  $$|\underline{x}(t+T(t,\epsilon)) - \underline{x}(t)| < \epsilon$$

  in Worten: lokal instabile Trajektorien kommen sich auf lange Zeiten beliebig nah.

$\Rightarrow$ Ansatz für Kontrollmethode in chaotischen Systemen:

i) kleine Änderung (Kontrolleingriff) $\longrightarrow$ große Wirkung (Veränderung der Stabilität)

ii) Wenn die Trajektorie jedem Punkt des Attraktors beliebig nah kommt, braucht man nur Geduld, um automatisch in der Nähe des Zielzustandes zu landen und diesen dann mit kleinen Kontrolleingriffen zu erreichen.

2.2.1 OGY-Kontrolle

OGY steht für Ed Ott, Celso Grebogi, James Yorke

VOLUME 64, NUMBER 11 PHYSICAL REVIEW LETTERS 12 MARCH 1990

page: 1196

Controlling Chaos

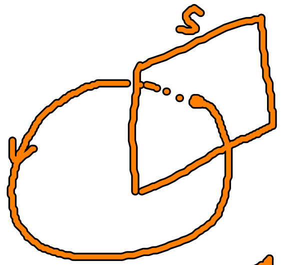
Edward Ott,[a),(b)] Celso Grebogi,[(a)] and James A. Yorke[(c)]
University of Maryland, College Park, Maryland 20742
(Received 22 December 1989)

Idee: i) Überführung von $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})$ in eine diskrete Abbildung mittels Poincaré-Schnitten.

ii) Kontrolle wirkt nur dann, wenn die Trajektorie in der Nähe des Zielzustandes ist.

Poincaré-Schnitt: Definiere Hyperebene $S = \{x : \underbrace{s(x) = 0}_{\text{Gl. der Ebene}}\}$ mit $x_1(0) \in S$

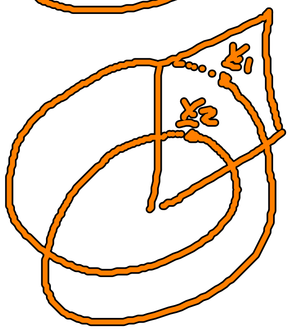
Beispiele:



$x_1(0) = x_1(0+T)$

Periode 1-Orbit (Periode T)

$\Rightarrow$ x_1: Fixpunkt auf S



abwechselnd $x_1, x_2, x_1, x_2, \dots$ im Poincaré-Schnitt

Periode 2-Orbit

Poincaré-Abbildung: $x \to P(x, u)$: 1. Wiederkehrpunkt auf Fläche S (Durchstoßpunkt)

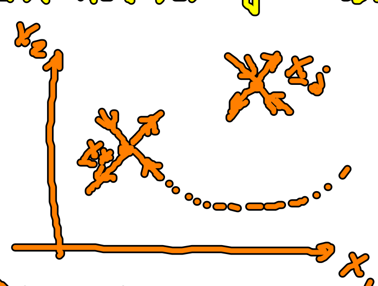
$\Rightarrow$ Folge von Punkten $x_{k+1} = P(x_k, u_k)$ mit $x_k = x(t_k)$ und t_k Zeitpunkt des k-ten Durchstoßens von S und $u_k = u(t)$ konstant für $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Dann kann man die Differenzialgleichung $\dot{x} = f(x, u)$ durch eine diskrete iterierte Abbildung ersetzen: $\tilde{x}_{k+1} = P(\tilde{x}_k, u_k)$ mit $\tilde{x}_k = x_k - x_*$ (Abweichung vom Zieldurchstoßpunkt x_*)

OGY-Kontrolle mittels:

$$u_k = \begin{cases} C\tilde{x}_k, & \text{wenn } |\tilde{x}_k| \le \Delta \quad (\text{Umgebung von } x_*) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein Kontrollsignal wird generiert, wenn die Trajektorie in der Nähe von x_* ist.



Poincaré-Schnitt S

Idee: Fixpunkt auf S so verschieben, dass nächstes x_{j+1} auf stabiler Mannigfaltigkeit von x_* landet.

x_* Sattelpunkt in S $\hat{=}$ instabilen periodischen Orbit im ursprünglichen System

Stabilisiere x_* $\to$ Stabilisierung des Orbits

(siehe auch Aufgabe 7, 4. Übungsblatt)

Nachteile:
- evtl. Wartezeiten
- Kenntnis des Zielzustandes x_*
- Poincaré-Schnitt in Realität schwer zu bestimmen
- rechenintensiv

2.2.2 Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

„time-delayed feedback" oder Pyragas-Kontrolle

Physics Letters A 170 (1992) 421–428
North-Holland

PHYSICS LETTERS A

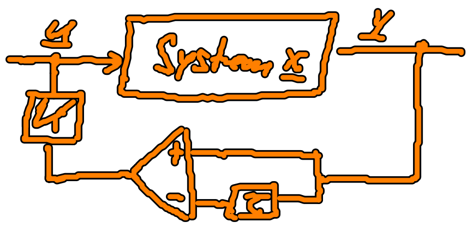
Continuous control of chaos by self-controlling feedback

K. Pyragas [1,2]
Institute for Theoretical Physics, Technical University of Berlin, W-1000 Berlin, Germany

Idee: Verwende statt $\underline{x}_*$ (Zielzustand) eine zeitverzögerte Version des Ausgangssignals (Output) $\underline{y}(t)$: $\underline{y}(t-\tau)$

$\Rightarrow$ Pyragas-Kontrolle: $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{\underline{K}}\left(\underline{y}(t) - \underline{y}(t-\tau)\right)$

Schema:



„closed loop", geschlossener Kontrollkreis, (Selbst-)Regelung

Vorteil:
- Keine Kenntnis des Zielzustandes nötig
- Nichtinvasivität: Verschwindende Kontrollkraft bei erfolgreicher Stabilisierung

Beispiele: i) Stabilisierung eines instabilen periodischen Orbits mit Periode T:
Bei der Wahl von $\tau = T$ gilt bei erfolgreicher Stabilisierung
$\underline{x}(t) = \underline{x}(t-\tau)$ und somit $\underline{u} = 0$

ii) Stabilisierung von Fixpunkten

Kontrollparameter: τ : Zeitverzögerung

$\underline{\underline{K}}$: Rückkopplungsmatrix (häufig: $\underline{\underline{K}} = k\,\mathbb{1}$) Stärke (Rückkopplungsstärke)

Beispiel: Rössler-System

$$\dot{x}(t) = -y(t) - z(t) \quad - k\left(x(t) - x(t-\tau)\right)$$

$$\dot{y}(t) = x(t) + a\,y(t)$$

$$\dot{z}(t) = b + \underbrace{\underbrace{z(t)}_{\text{Nichtlinearität}}\,(x(t)-\mu)}_{\text{unkontrolliertes System}}$$

unkontrolliertes System: chaotisch z.B. für $a = 0.2$, $b = 0.2$, $\mu = 6.5$

$\Rightarrow$ Periode 1-Orbit mit $T_1 = 5.91679$

Periode 2-Orbit mit $T_2 = 11,82814$

PHYSICAL REVIEW E **71**, 016222 (2005)

Delayed feedback control of chaos: Bifurcation analysis

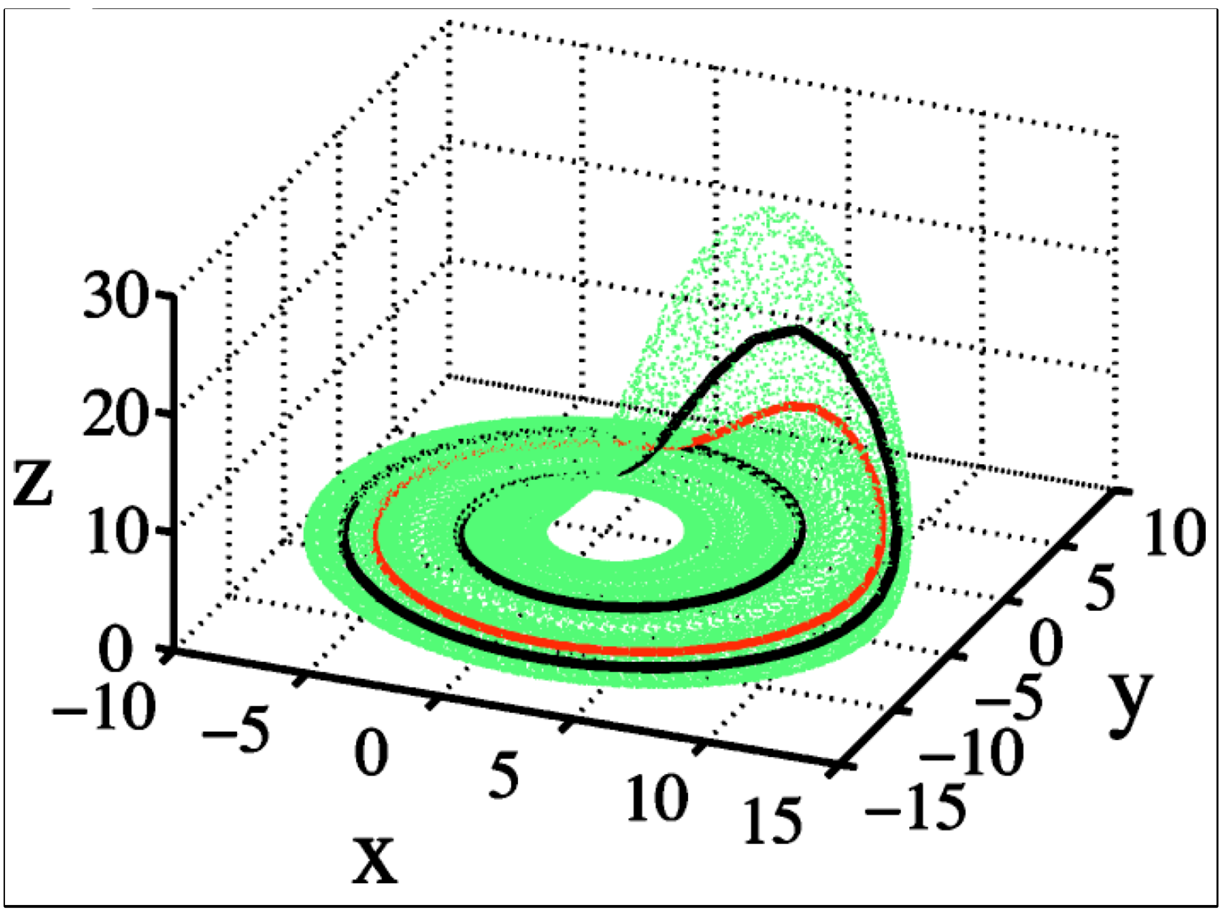
A. G. Balanov,[1] N. B. Janson,[2,1] and E. Schöll[1]

[1] *Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin, Hardenbergstraße 36, D-10623 Berlin, Germany*

[2] *Department of Mathematical Sciences, Loughborough University, Loughborough, Leicestershire LE11 3TU, United Kingdom*

Fig 1 aus

Periode 1-Orbit stabilisiert (nichtinvasiv) für $0.24 < K < 2.3$



roter Orbit: Periode 1-Orbit

schwarzer Orbit: Periode 2-Orbit

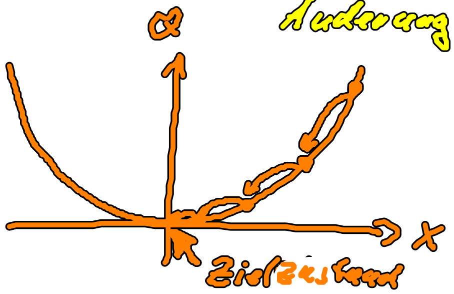
Vertiefung in Kapitel 3 „retardierte Systeme“ (Stabilitätsanalyse von Systemen mit Zeitverzögerungen, Erweiterung der Pyragas-Kontrolle...)

Referenzen: Handbook of Chaos Control, Hrsg: E. Schöll, H.-G. Schuster, Wiley (2008)

2.3 Adaptive Kontrolle

Idee: Kostenfunktion $Q(\underline{x}(t),t)$ minimalisieren, $Q \geq 0$, $\lim_{t\to\infty} Q(\underline{x}(t),t)=0$

Kontrollidee: Herleitung einer zusätzlichen Differenzialgleichung für $\underline{u}$, die Änderungen von Q berücksichtigt.



z.B.: $Q(\underline{x}) = \frac{1}{2}\left(\underline{x}(t) - \underline{x}(t-\tau)\right)^2$

Speed gradient method (A. Fradkov, I. Miroshnik, V. Nikiforov Nonlinear and adaptive control of complex systems, Kluwer, 1999
A. Fradkov: Cybernetical Physics: From Control to Quantum Control, Springer 2008)

„Speed“ von Q: $\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla_{\underline{x}} Q(\underline{x},t)\cdot \underbrace{\dot{\underline{x}}}_{=\underline{f}(\underline{x},\underline{u})}$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\underline{u}} = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}}$$

Γ: Proportionalitätskonstante

Richtung im u-Raum, in der $\dot{Q}$ am stärksten abnimmt

$\Rightarrow \dot{Q} < 0 \Rightarrow Q$ nimmt ab $\Rightarrow Q \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

Bsp.: Anwendung auf Pyragas-Kontrolle zur automatischen Regelung von der Rückkopplungsstärke K: $\dot{K} = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}$

z.B. im Rössler-System: $u = -K\left(x(t) - x(t-\tau)\right)$