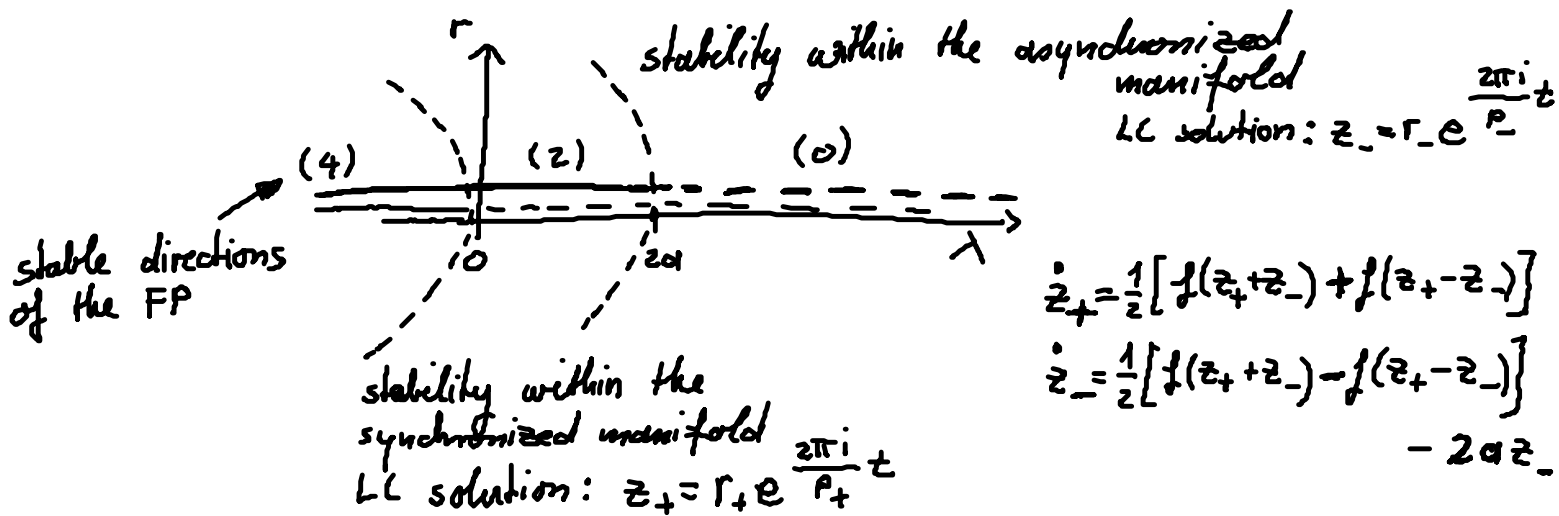


English Summary →

- Delayed feedback control allows to control
 - unstable periodic orbits inside a chaotic attractor
 - spatio-temporal systems
 - periodic solutions in space : Turing patterns

• 4.2. Two coupled oscillators (Hopf-normal forms)

stability of fixed point (FP):



4.3. Stabilisierung periodischer Lösungen mit Delay

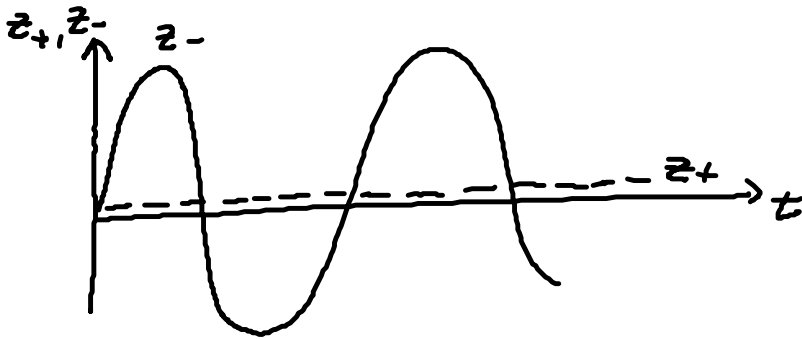
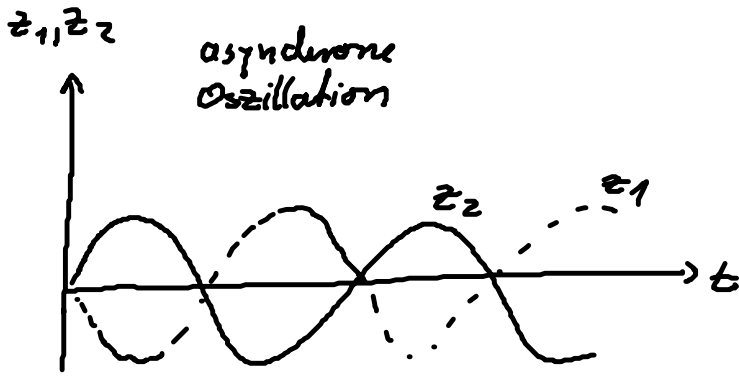
(i) z_{synch} wurde in 3.2.2. durch Wahl $\tau = P_+$ stabilisiert

(ii) z_{as} stabilisierbar durch zeitverzögerte Rückkopp.
mit $\tau = \frac{P_-}{2}$

Begründung $z_-(t - \tau) = z_-(t - \frac{P_-}{2}) = r_- e^{\frac{2\pi i}{P_-} (t - \frac{P_-}{2})}$

$$= r_- e^{\frac{2\pi i t}{P_-}} \underbrace{e^{-i\pi}}_{-1}$$

$$= -z_-(t)$$



Systemgleichung mit nichtinvasiver Kontrolle verschwindet auf
asynchroner
Lösung $\tau = \frac{P_-}{2}$

$$(I) \quad \dot{z}_1 = f(z_1) + a(z_2 - z_1) + b(z_2(t - \tau) - z_1(t))$$

$$(II) \quad \dot{z}_2 = f(z_2) + a(z_1 - z_2) + b(z_1(t - \tau) - z_2(t))$$

NB: Kontrolle ist invasiv für den
gleichphasigen Orbit

$$(I)' \quad \dot{z}_+ = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) + b(z_+(t - \tau) - z_+(t))$$

$$(II)' \quad \dot{z}_- = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)) - 2a z_- - b(z_-(t - \tau) - z_-(t))$$

Strategie zum Nachweis der Stabilisierung von

$z_- = r_- e^{i\psi}$; Untersuchung der Stabilität des Fixpunktes im Ursprung.

→ Linearisierung von I', II' um $z_1 = z_2 = 0$
 $z_+ = 0 = z_-$

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2} \left[(\lambda+i)(z_+ + z_-) + (\lambda+i)(z_+ - z_-) \right] + b(z_+(t-\tau) - z_+(t))$$

$$f(z) = (\lambda+i + (1+i\mu)|z|^2) \cdot z$$

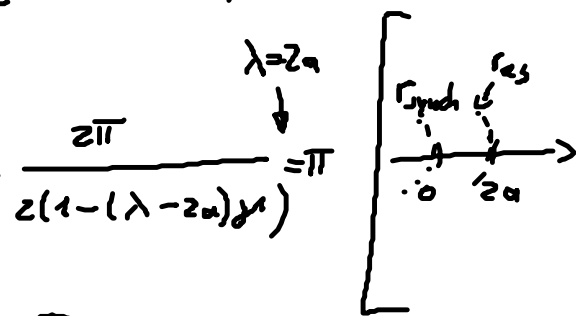
$$\dot{z}_+ = (\lambda+i)z_+ + b(z_+(t-\tau) - z_+(t))$$

$$\dot{z}_- = (\lambda - 2a + i)z_- - b(z_-(t-\tau) - z_-(t))$$

Linearisierung
 Entkoppelt z_+ & z_-

Weiter Ansatz: $z_{\pm} \sim e^{\eta t}$ (η Eigenwert)

Untersuchung der Stabilität bei $\lambda = 2a$
 mit $z = \frac{p_-}{2} = \frac{2\pi}{2(1 - (\lambda - 2a)\tau)}$



$$z_+ : 0 = \lambda + i + b(e^{-2z^{\frac{\pi}{2}}} - 1) - \eta \quad (*)_+$$

$$z_- : 0 = 2a - 2a - i - b(e^{-\pi\eta} - 1) - \eta \quad (*)_- \quad b \in \mathbb{R}$$

Suche Hopf-Kurven in Ebene $(\text{Re } b, \text{Im } b)$, die $\text{Re } \eta = 0$ erfüllen
 d.h. Suche Grenzen, an denen sich die instabile Dimension des Fixpunktes ändert.

Parametrisierung der Hopf Kurven durch
 $b = b(\omega)$
 $\eta = 0 + i(1 + 2\omega)$

Einsetzen in $(*)_-$ und $(*)_+$

$$b_+(\omega) = 2 \frac{a - i\omega}{1 + \exp(-2\pi i\omega)}$$

$$b_-(\omega) = 2 \frac{i\omega}{-1 + \exp(-2\pi i\omega)}$$

$$\lambda = 2\alpha$$

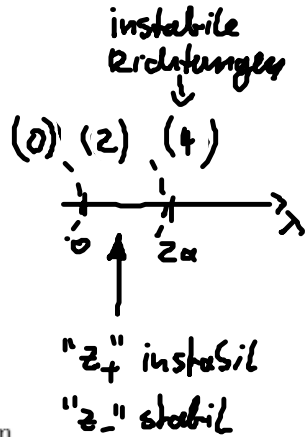
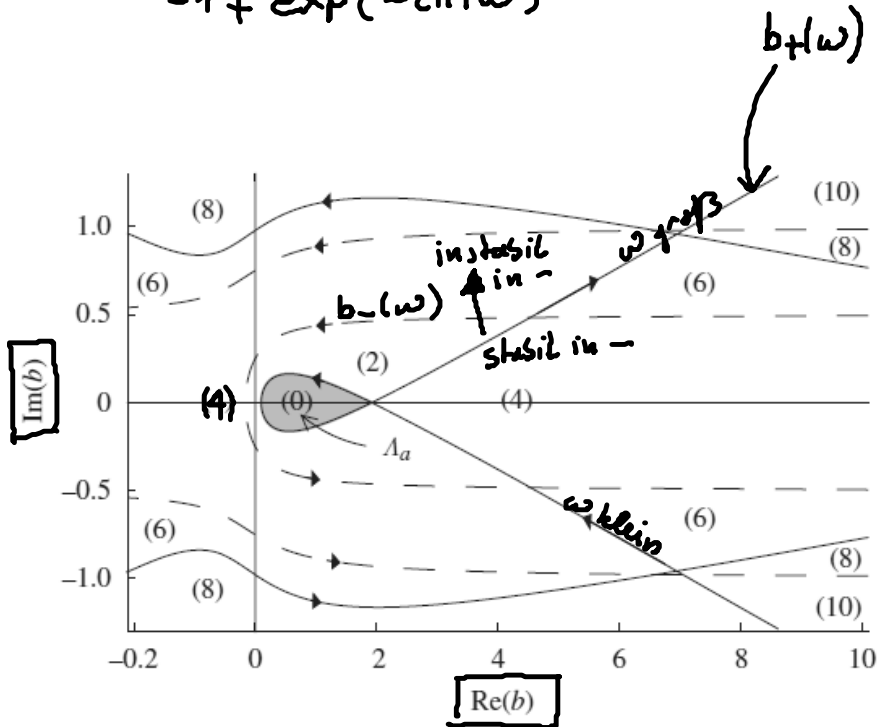
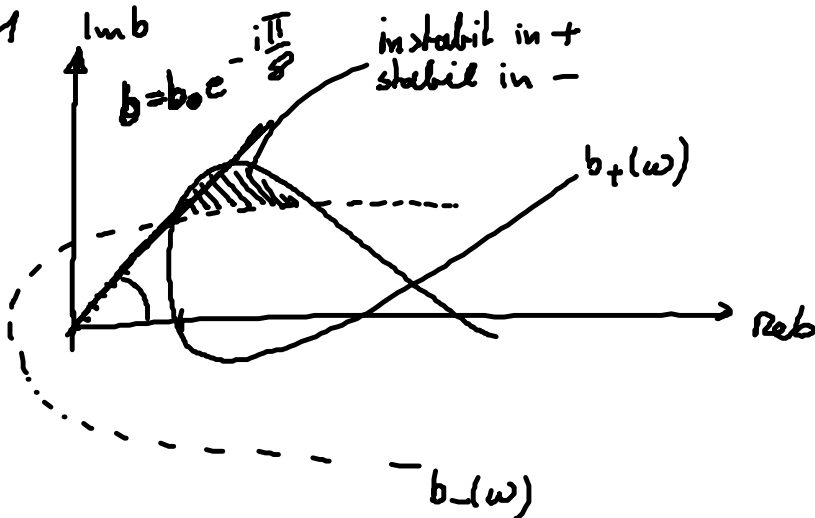
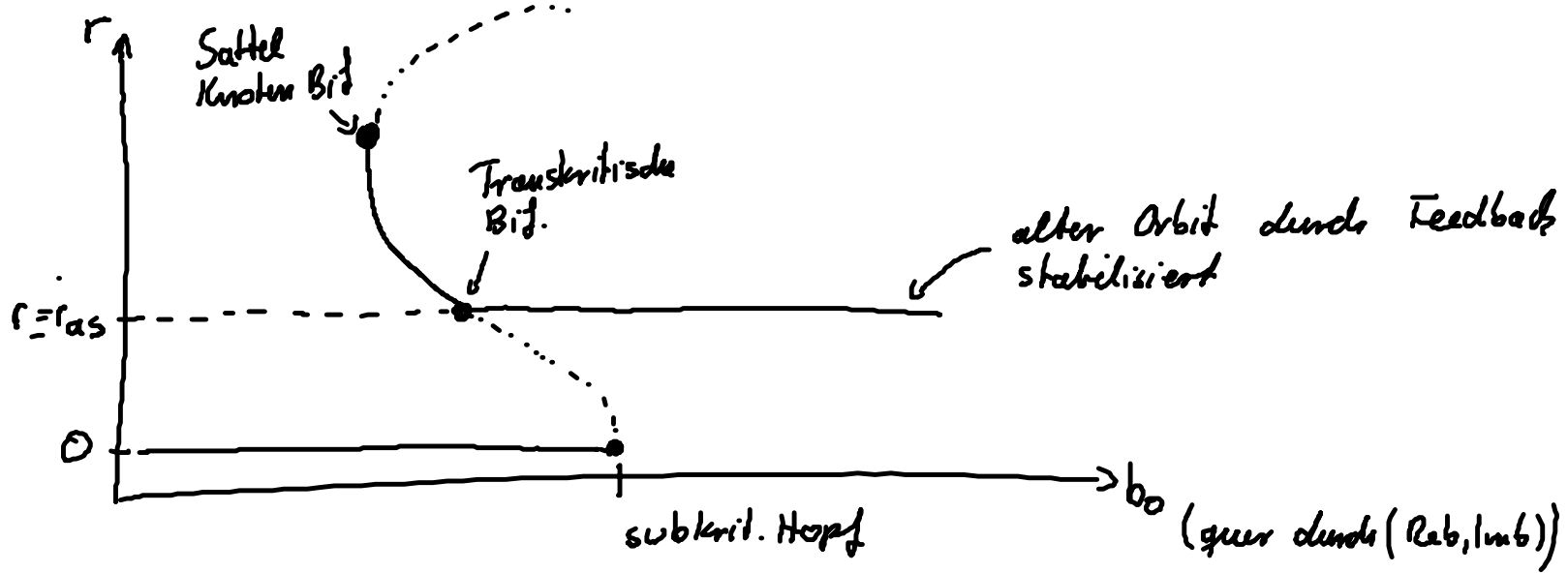


Figure 5. Oriented Hopf curves $b = b_+(\omega)$ (solid) and $b = b_-(\omega)$ (dashed) for $\omega \in \mathbb{R}$ in control system (3.2), linearized at $z_1 \equiv z_2 \equiv 0$. Orientation arrows indicate increasing ω . Note the symmetry with respect to the real axis, owing to complex conjugation $b_{\pm}(-\omega) = \overline{b_{\pm}(\omega)}$. Unstable dimensions are indicated by $E(b)$. Note $E(b) = 0$ inside the shaded loop Λ_a . $a = 0.1$.

$$\lambda = 2\alpha - 0.01$$





- r_{as} tatsächlich stabilisiert (im straffierten Bereich)
- neue Delay induzierte Orbits in der Dynamik entstehen durch Sattel-Knoten Bifurkation

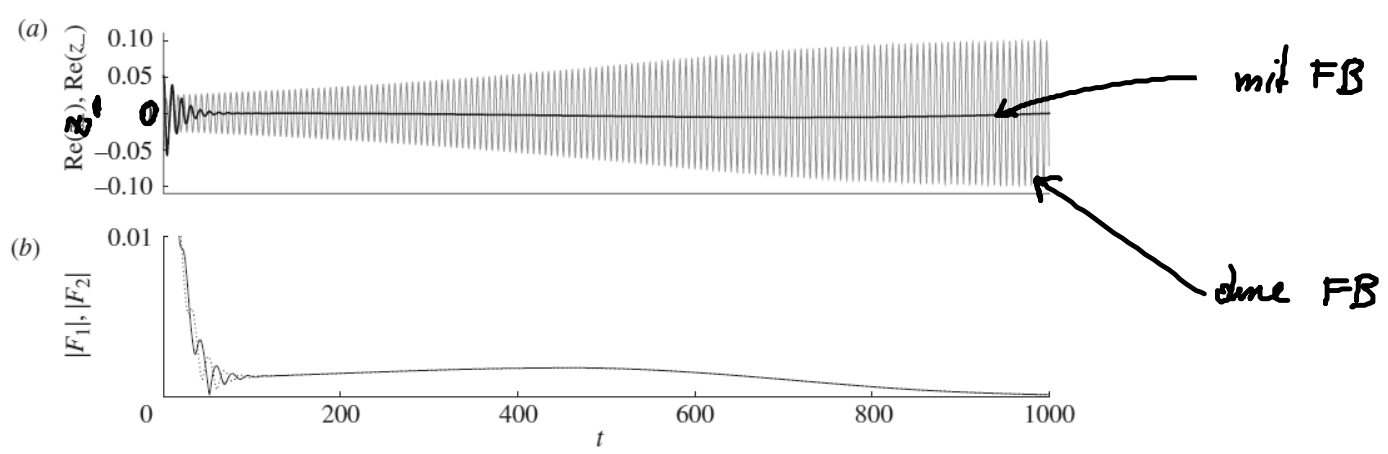


Figure 9. Stabilization of the anti-phase branch in the subcritical case. (a) Time series of $\text{Re } z_+$ (black) and $\text{Re } z_-$ (grey) and (b) time series of coupling forces $F_1 := b \cdot (z_1(t - \tau) + z_2)$ (solid) and $F_2 := b \cdot (z_2(t - \tau) + z_1)$ (dotted) acting on the systems. The system starts away from the anti-phase plane $z_+ = 0$. After a short time, the in-phase component z_+ decays and the system goes to the anti-phase plane. After a longer transient, the system approaches the stabilized anti-phase orbit. Once the anti-phase orbit is reached, the control forces vanish. $a = 0.1$, $\lambda = 2a - 0.01$, $\gamma = 1 - 10i$, $\tau = p_-/2 = \pi/(1 - (\lambda - 2a)\text{Im } \gamma/\text{Re } \gamma)$, $b = 0.24 e^{i\pi/8}$.

4.4. Netzwerke

- Erweiterung der 2 gekoppelte Oszillatoren auf beliebig viele und beliebig gekoppelte Osz.

Kopplung: Link (Verbindung) im Netzwerk

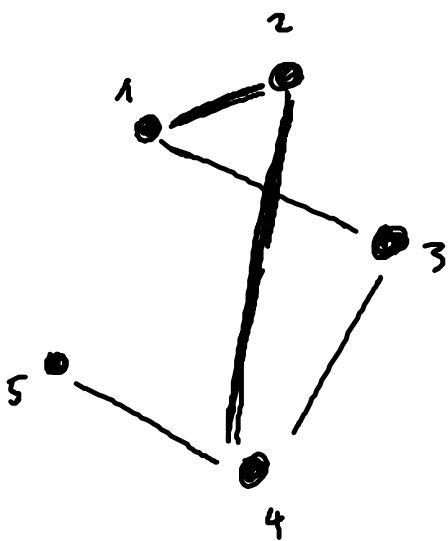
Elemente: Knoten (Node) im Netzwerk
z.B. Laser, Neuronen

- Wichtige Infos zur Beschreibung

1) Topologie (welcher Knoten ist mit wem gekoppelt)

2) Kopplungsschema (wie wirkt die Kopplung
z.B. diffusiv wie in 4.2.)

4.4.1. Topologie des Netzwerkes



N Knoten

$N \times N$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A : Nachbarschaftsmatrix
= Adjacency-Matrix

- A : $a_{ij} = 1$ wenn Kopplung existiert sonst 0

Erweiterung von A

- gerichtete Verbindungen \rightarrow A nicht mehr symm.
- gewichtete Verbindungen \rightarrow a_{ij} Werte zwischen 0 und 1 annehmen

- Charakterisierung der Topologie durch Kenngrößen

z.B. • Knotenordnung
(Zahl angekoppelter Elemente)

$$k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$$

- Verteilung von k : $P(k)$ Wahrscheinlichkeit einen Knoten der Ordnung k zu finden

- mittlere Knotenordnung $\langle k \rangle = \sum_i P(k_i) k_i$

• es existieren viele weitere mögliche Größen um Netzwerk Topologien zu unterscheiden

- mittlere Pfadlänge
- Clusterkoeffizient
- Einbettung

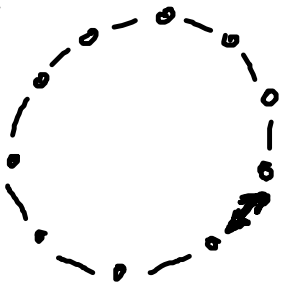
Literatur

Newman „Networks: An Introduction“

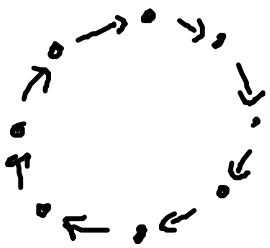
• Eigenwertspektrum von \underline{A} auch gut um Topologie zu beschreiben (enthält vollständige Information)

z.B.

Netz, $N=8$

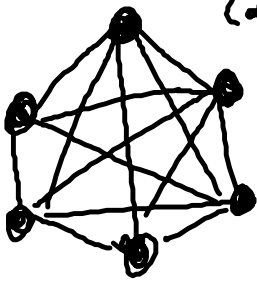


bidirektionaler Ring

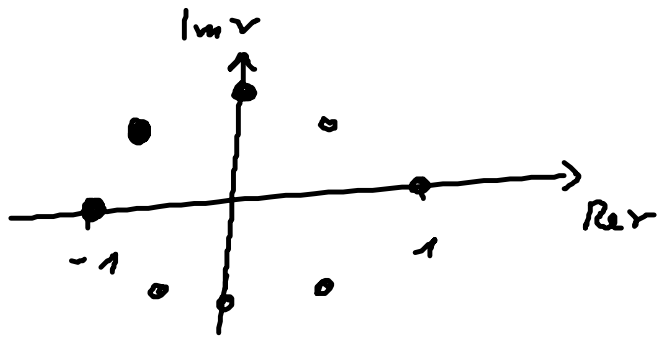
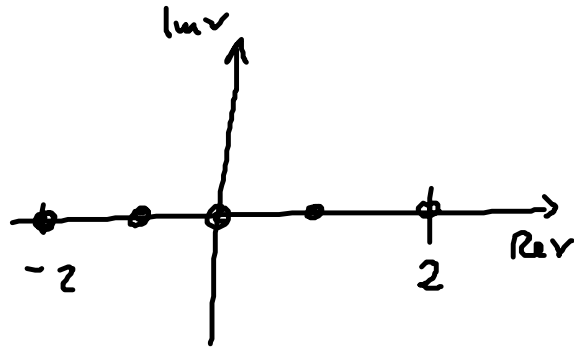


unidirektionaler Ring

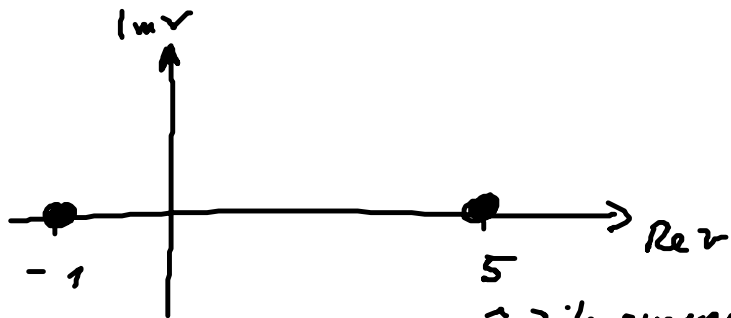
vollständiges Netz (all-to-all)



EW ν



$$\nu_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$$



$\hat{=}$ Zeilensumme von \underline{A}