Summary →

- Time delayed feedback control can be used to modify spectral properties of noise induced oscillations

- Peaks in power spectral density ($S(\omega)$) can be related to nearly vanishing real parts of eigenvalues (linearized system)

- Van der Pol-Osz:

  Mean-field approximation of nonlinear damping

$$\varepsilon - x^2 \approx \varepsilon - \langle x^2 \rangle = \tilde{\varepsilon}$$

  ⇒ self-consistency equation for $\langle x^2 \rangle$

  ⇒ correlation-time

$$t_{cor} = \frac{4}{\pi \tilde{\varepsilon}} \left(1 + \frac{K}{2}\tau\right)$$

  ⇒ spectral properties: (solving mean field-equation in Fourier-space)

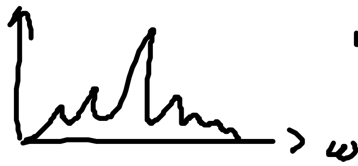
$S(\omega)$

$K=0$

Lorentzian lineshape

$$\Delta \approx \frac{|\tilde{\varepsilon}|}{2} = \frac{2}{\pi t_{cor}}$$

$K \neq 0$

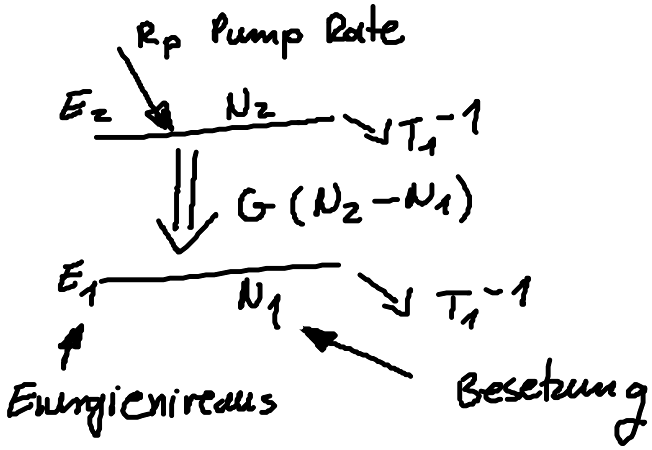


more side-maxima appear

End of chapter 5: Noise

6. Nichtlineare Dynamik am Beispiel des Lasers

6.1. Laser - Ratengleichungen



- Photonenzahl

$$\frac{dN_{ph}}{dt'} = G\bar{D}N_{ph} - \frac{N_{ph}}{\tau_{ph}}$$

- Inversion $\bar{D} = N_2 - N_1$

$$\frac{d\bar{D}}{dt'} = \frac{1}{T_1}\left(\bar{D} - \underbrace{\bar{D}_0}_{\bar{D}_0 = R_p T_1}\right) - 2G\bar{D}N_{ph}$$

τ_{ph} : Photonenlebensdauer

T_1 : Elektronenlebensdauer

Dimensionlose Formulierung

$I = 2GT_1N_{ph}$ Intensität

$D = G\tau_{ph}\bar{D}$ Inversion

$t = \frac{t'}{\tau_{ph}}$

- Zeitskalenparameter

$$\gamma = \frac{\tau_{ph}}{T_1}$$

- Pump Parameter

$$P = G\tau_{ph}R_pT_1$$

$$\Rightarrow \quad \dot{I} = I(D-1)$$
$$\dot{D} = \gamma(P - D(1+I))$$

Größenordnungen

Laser	τ_{ph}	T_1	γ_1
CO_2	$10^{-8}\,s$	$4 \cdot 10^{-6}\,s$	$2.5 \cdot 10^{-3}$
Festkörper	$10^{-6}\,s$	$2.5 \cdot 10^{-4}\,s$	$4 \cdot 10^{-3}$
Halbleiter GaAs	$10^{-12}\,s$	$10^{-9}\,s$	10^{-3}
HeNe	----	--..	>1

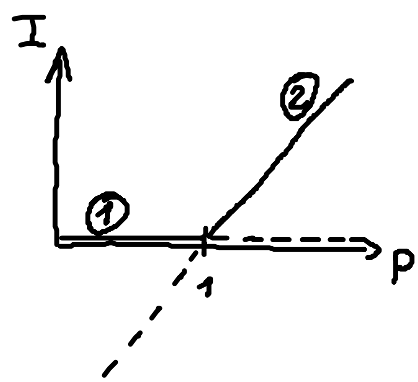
führt zu schlechten Stabilitätseigenschaften

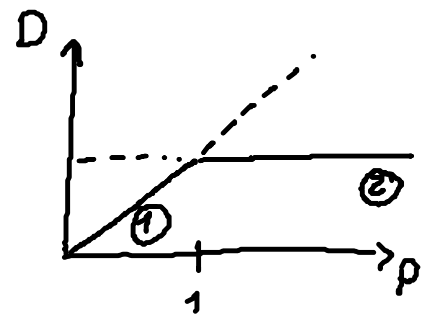
Fixpunkte

2 Lösungen

① $I = 0$ & $D = P$

② $I = P - 1$ & $D = 1$





Laserschwelle

Transkritische Bifurkation

Stabilität

Jakobi-Matrix

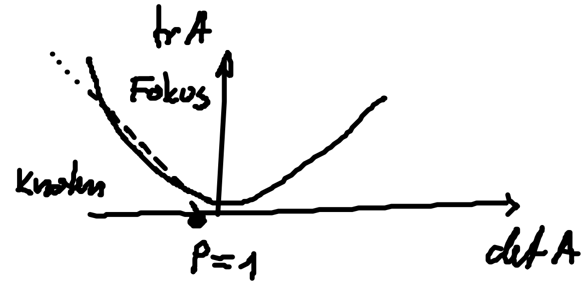
$$A = \begin{pmatrix} D-1 & I \\ -D\gamma_1 & -(1+I)\gamma_1 \end{pmatrix}$$

① EW am Fixpunkt ①

$\lambda_1 = P - 1$

$\lambda_2 = -\gamma < 0$

② EW am Fixpunkt ②



$$\lambda^2 + \gamma P \lambda + \gamma (P-1) = 0$$

$$\mathrm{tr} A = -\gamma P < 0$$

$$\det A = \gamma (P-1) > 0 \text{ für } P > 1$$

$$\lambda_{12} = \overset{x_0}{-\gamma \frac{P}{2}} \pm i \underbrace{\sqrt{\overset{\Delta x}{\gamma (P-1) - \gamma^2 \frac{P^2}{4}}}}_{\text{wenn} > 0 \;\rightarrow\; \text{Fixpunkt ist Fokus}}$$

Für γ klein: Taylor um x_0

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2} \Delta x f'(x_0)$$

$$\underline{\underline{\lambda_{1,2} = -\gamma \frac{P}{2} \pm i \sqrt{\gamma (P-1)}}} + \mathcal{O}(\gamma^{3/2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}} \Delta x \sim \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \gamma^2$$

Lösung in der Nähe des Fixpunktes (γ klein)

$$\delta I = I - (P-1) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

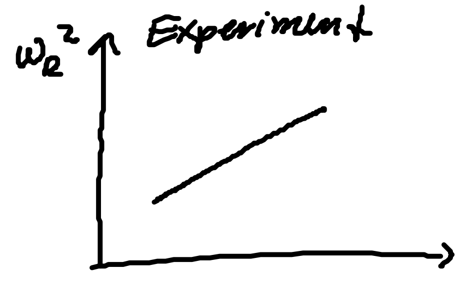
$$= c\, e^{\underbrace{-\frac{\gamma}{2} P}\, t} \sin\left(\underbrace{\sqrt{\gamma (P-1)}}\, t + \phi\right)$$

Dämpfungsrate $\Gamma = \gamma \frac{P}{2}$

Relaxations-Oszillations (RO) Frequenz $\omega_R = \sqrt{\gamma (P-1)}$

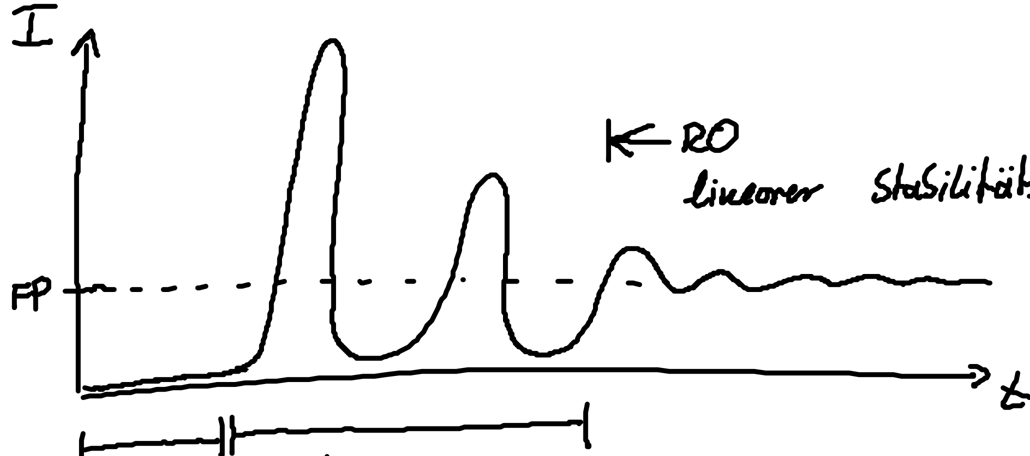
Bem.: - gedämpfte RO
- schwach stabilen FP

$\omega_R^2 = 2\Gamma - \gamma_1$



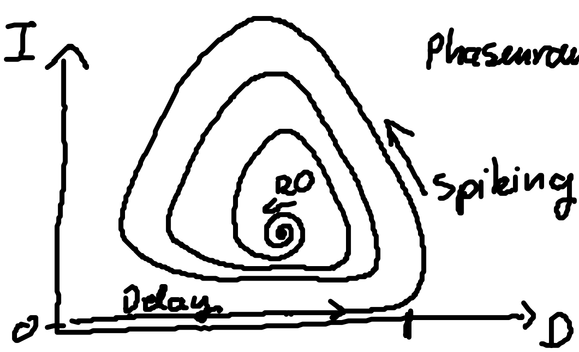
$\Rightarrow \gamma_1$ kann bestimmt werden

Einschwingvorgang (Experiment)



← RO
linearer Stabilitätsanalyse

γ_1 klein
Class B Laser



Phasenraum

spiking (später!)

- Beschreibung des Lasers mit elektrischem Feld $\tilde{E}(t)$

$\tilde{E}$: komplexes Feld (nur Amplitude ohne schnelle optische Frequenz

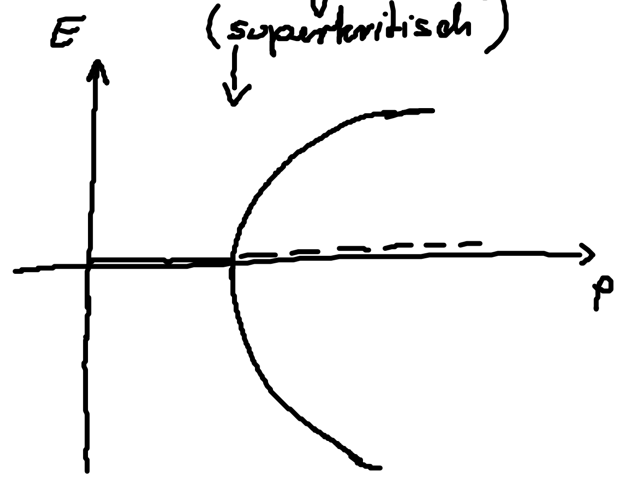
$$E = \tilde{E} e^{i\omega_0 t}$$

• Herleitung aus
Maxwell – Bloch – Gl. mit
Eliminierung der mikr. Polarisation)

$$\dot{\tilde{E}} = \frac{1}{2} G \tilde{D} \tilde{E} - \frac{\tilde{E}}{2\tau_{ph}}$$

$E = \sqrt{2GT_1}\,\tilde{E}$ (dimensionslos)

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & \dot{E} = \frac{1}{2} E (D-1) \\ (\mathrm{II}) & \dot{D} = \gamma (P - D(1+E^2)) \end{array}$$



Lösung ①: $E = 0$, $D = P$
②: $E = \pm\sqrt{P-1}$, $D = 1$

Fall γ groß:

- D ändert sich schnell und ist dann konstant am Fixpunkt
- D folgt sofort jeder Änderung von E

• Versklavungsprinzip (Haken)

$\hat{=}$ adiabatisches Eliminieren

$\Rightarrow \dot{D} = 0$

$\Rightarrow$ II: $\dot{D} = 0$

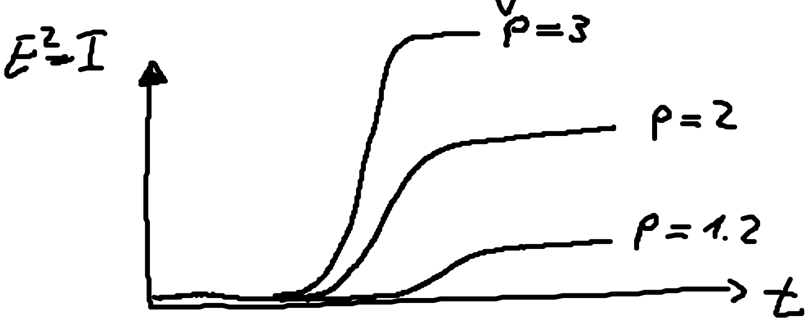
$D(1+E^2) = P \quad \longrightarrow \quad D(t) = \dfrac{P}{1+E^2(t)}$ statischer Zusammenhang

ändert sich nur auf langsamer Zeitskala

ist zeitabhängig

I: $\boxed{\dot{E} = \frac{1}{2} E \left(\frac{P}{1+E^2} - 1 \right)}$ ⇦ Class A Laser

$\rightarrow$ nur noch ein dynamischer Freiheitsgrad



- kritische Verlangsamung am Bifurkationspunkt $P=1$

4.2. Normalform der Laser Gleichung in der Nähe der Schwelle

- Suche einfache Amplitudengleichung bei $P=1$
- Methode: Störungstheorie mit Vielzeitenansatz

Erinnerung: 2 Zeitskalen im System

(*) $\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma P + \frac{P-1}{P} \\ \lambda_2 &= -\frac{P-1}{P} \end{aligned}}$

(wenn $P \to 1 \Rightarrow \lambda_2$ klein)

$$(*)\quad \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma_1}{2}p \pm i\sqrt{\underbrace{\gamma_1(p-1)}_{\Delta x} - \underbrace{\gamma_1^2\frac{p^2}{4}}_{x_0}}$$

$$= -\frac{\gamma_1}{2}p \pm i\sqrt{x_0 + \gamma_1(p-1)}$$

Taylor

$$\approx -\frac{\gamma_1}{2}p \pm i\, i\,\frac{\gamma_1 p}{2} \pm \frac{1}{2}\, i\,\gamma_1(p-1)\frac{2}{\gamma_1 p \cdot i}$$

$$= -\frac{\gamma_1}{2}p \mp \frac{\gamma_1 p}{2} \pm \frac{p-1}{p} \quad \blacksquare$$

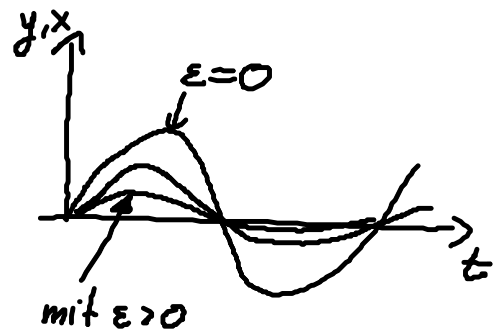
Einschub Störungstheorie

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\quad \ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + x = 0$

$\uparrow$ klein

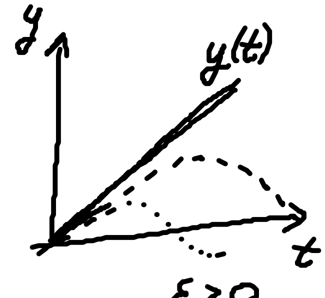
ungestörtes Problem : $\ddot{y} + y = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{regulär gestörtes Problem}}$



$\boxed{\text{Bsp}}$ $\quad \ddot{x} + \varepsilon x = 0$

ungestörtes Problem $\ddot{y} = 0$



$\boxed{\Rightarrow \text{singulär gestörtes Problem}}$

▶ **Def.:** Ein Problem $P_\varepsilon(x_\varepsilon)$ heißt regulär gestört, wenn seine Lösung x_ε für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig bezüglich t konvergiert.

▶ **Def:** Ein Problem heißt singulär gestört, wenn gleichmäßige Konvergenz $x(t,\varepsilon) \longrightarrow y(t)$ für $\varepsilon \to 0$ verletzt ist.