2. Vektor- und Tensorrechnung

- Motivation: Grundlagen der Vektor-/Tensorrechnung wiederholen, wichtig für Kontinuumstheorie.

2.1. Grundlagen des Euklidischen Raumes

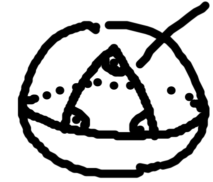
a) physikalischer Anschauungsraum

im folgenden: $\boxed{\text{Physikalischer Anschauungsraum } A = \text{euklidische Raum} = \text{flacher Raum}}$ (2.1)

→ euklidische Geometrie gilt:

Bsp. (i) Winkelsumme im Dreieck = 180°

Gegenbsp.: Kugel:

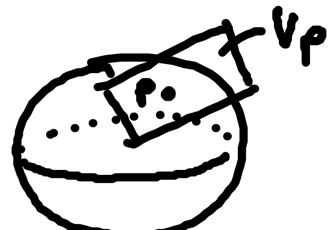


(ii) Satz von Pythagoras:

$a^2+b^2=c^2$

(iii) Parallelenaxiom

- Unterscheide:
  - (i) physikalischen Anschauungsraum A mit Punkten
  - (ii) Vektorraum V_P („Tangentialraum"), angeheftet an jeden P, in dem die phys. Vektoren wirken
  - gekrümmter Raum: Bsp.



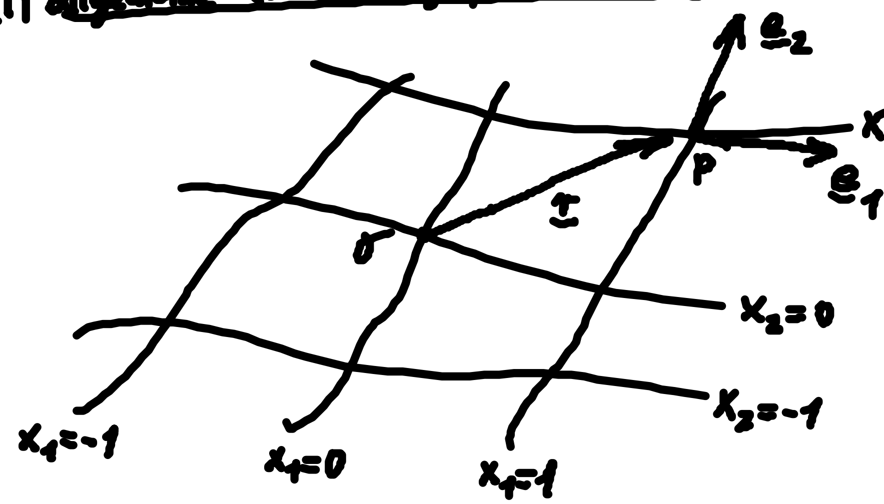
  - flacher Raum:
    Pkte in A definieren die Vektoren
    → Unterscheidung „künstlich"

→ Folgen: Affiner Raum, Vektorraum, Eukl. Raum, Eukl. Vektorraum

b) Koordinatensysteme: - Motivation: Koordinaten von Pkten. P, für Beschreibung von Skalar-, Vektor- und Tensorfelder

- Ort von Pkt. $P \longleftrightarrow$ Koordinatentripel (x_1, x_2, x_3)

(i) allgemeine (krummlinige) Koordinaten:



} Netz von beliebigen Koord.-Linien

Ort von P: (x_1, x_2, x_3) mit Ortsvektor $\underline{r} = \overrightarrow{OP} \in V$

- natürliche (Koordinaten) Basis für V_P angeheftet an P:

normierte Tangentialvektoren $\underline{e}_i$ an x_i-Linien (x_j = konst. $j \neq i$)

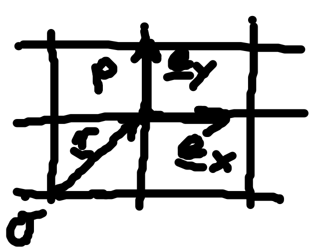
also: $\boxed{\underline{e}_i = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|^{-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}}$ (2.5) mit $|\underline{e}_i| = 1$, i.a. $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j \neq \delta_{ij}$ und $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ nicht ortsfest

$\rightarrow \boxed{\Gamma^i_{kl} = \underline{e}_i \cdot \frac{\partial \underline{e}_k}{\partial x_l}}$ (2.6) Konnexionskoeffizienten/ Christoffelsymbole keine Tensoren!

N.B.: (1) i.f. $\boxed{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}}$ (2.7), also Orthonormalbasis (ONB)

(2) in ART: $\underline{e}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}$

(ii) Kartesische Koordinaten:



P: (x, y, z)

$\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ ortsfest

$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ $\quad i,j = x,y,z$

$$\rightarrow \begin{cases} \underline{r} = \sum_i x_i \underline{e}_i = x_i \underline{e}_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \\ \Gamma^i_{kl} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

(iii) Zylinderkoordinaten
(iv) Kugelkoordinaten s. Folie / Übung

2.2. Tensoren 2. Stufe

a) Einordnung: Tensoren 0. Stufe = Skalare

" 1. Stufe = Vektoren $\underline{a} \in V_p$

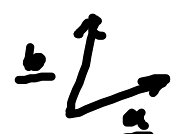
$\underline{a} = a_i \underline{e}_i$ mit $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ ... ONB in V_p

Schreibweise: $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ Matrixdarstellung

b) **Definitionen & dyadisches Produkt:**

Def.: Tensoren 2. Stufe vermitteln eine lineare Abbildung von V_p in sich selbst:

$\underline{\underline{T}}: V_p \to V_p$



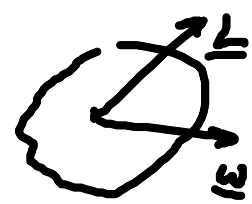
$\underline{\underline{T}}: \underline{a} \longrightarrow \underline{b} := \underline{\underline{T}}\,\underline{a}$ $\quad \underline{a}, \underline{b} \in V_p$ (2.15)

Linearität: $\underline{\underline{T}}\,(p\underline{a} + q\underline{b}) = p\,\underline{\underline{T}}\,\underline{a} + q\,\underline{\underline{T}}\,\underline{b}$ $\quad p, q \in \mathbb{R}$

Bsp.1 starrer Körper: $\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\omega}$ ← Winkelgeschw.

Drehimpuls

Trägheitstensor



Bsp.2 Spannungstensor: charakterisiert Material (s. Kapitel 3)

(lat. tendo ; spannen)

• Komponenten von $\underline{\underline{T}}$ bzgl. einer Basis in V_p ?

Voraussetzung: Koordinatenbasis = ONB : $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ $\quad i,j = 1,2,3$

$\underline{e}_i \cdot \big|\;\; \underline{b} = \underline{\underline{T}}\,\underline{a} \longrightarrow b_i = \underline{e}_i \cdot \underline{b} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{a}$

$$\xrightarrow[\text{Linearität}]{\underline{a} = a_j \underline{e}_j} b_i = (\underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j)\,a_j$$

$$\longrightarrow \boxed{T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j} \quad (2.16)$$ Komponenten von $\underline{\underline{T}}$

$$\boxed{\underline{b} = \underline{\underline{T}}\,\underline{a}} \longleftrightarrow \boxed{b_i = T_{ij}\,a_j} \quad (2.17)$$

„symbolische Schreibw." „Komponentenschreibweise"

Schreibweise: $\underline{\underline{T}}$ in Matrixdarstellung: $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ \vdots & & \\ T_{31} & \cdots & T_{33} \end{pmatrix}$, T_{ij} ← Spalte, ↑ Zeile

$\underline{b} = \underline{\underline{T}}\,\underline{a}$: lineare Abbildung, darstellungsfrei

Def. Das Tensor-/dyadische Produkt von $\underline{a}, \underline{b} \in V_p$: (2.18)

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \in V_p \times V_p \quad (\text{Produktraum})$$

besitzt die Eigenschaften:

1. Bilinearität $\quad \underline{a} \otimes \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \otimes (b_j \underline{e}_j) = a_i b_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$
2. lineare Abbildung $\quad (\underline{a} \otimes \underline{b})\,\underline{c} = \underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{c}) \in V_p$

(2.18) legt nahe:

Satz: Tensoren 2. Stufe sind Elemente des Produktraumes $V \times V$, das durch die Basistensoren $\{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j,\ i,j = 1,2,3\}$ aufgespannt wird: (2.19)

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

... Entwicklung von $\underline{\underline{T}}$ nach Basis! (vgl. $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$)

Beweis: (2.16) $\Rightarrow T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j = \underline{e}_i \cdot (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\, \underline{e}_j$

$$= T_{kl} (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k)(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j) = T_{kl}\, \delta_{ik}\, \delta_{lj} = T_{ij} \checkmark$$

NB $\boxed{(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} = a_i b_j}$ 2.20

Bew.: $\underline{e}_i \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b})\, \underline{e}_j = (\underline{e}_i \cdot \underline{a})(\underline{b} \cdot \underline{e}_j) = a_i b_j$

c) Spezielle Tensoren: · transponierter Tensor $\underline{\underline{T}}^t$

$$\underline{a} \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{\underline{T}}^t \underline{a} = (\underline{\underline{T}}^t \underline{a}) \cdot \underline{b}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{a} &= \underline{e}_j \\ \underline{b} &= \underline{e}_i \end{aligned}\right\} \quad T_{ji} = (\underline{\underline{T}}^t)_{ij} \quad (2.21)$$

- allg. Tensor 2. Stufe (in 3 Dim.): $3 \times 3 = 9$ unabh. Komp.

<u>symmetrischer Tensor</u> (Bsp. Spann.tensor)

$$\boxed{\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{T}} \leftrightarrow T_{ij} = T_{ji}} \qquad (2.22)$$

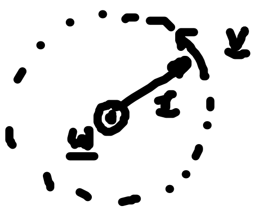
... 6 unabh. Komp. $T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23}$

<u>antisymm. Tensor</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\underline{T}}^t = -\underline{\underline{T}} \leftrightarrow T_{ij} = -T_{ji} \\ \rightarrow T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0 \end{array}} \qquad (2.23)$$

... 3 unabh. Komp. T_{12}, T_{13}, T_{23}

Bsp. $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} := \underline{\underline{\Omega}}\, \underline{r}$ mit $\Omega_{ij} = \varepsilon_{ikj}\, \omega_k$



$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Zerlegung:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}_S + \underline{\underline{T}}_A \\ &= \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^t\right)}_{\text{symmetr.}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^t\right)}_{\text{antisymm.}} \end{aligned}} \qquad (2.24)$$

- Einheitstensor $\underline{\underline{1}} = \delta_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

d) <u>Algebra</u> (wie Matrizen)

- Addition $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \longrightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
- skalare Mult. $\underline{\underline{C}} = \rho\, \underline{\underline{A}} \longrightarrow C_{ij} = \rho\, A_{ij}$, $\rho \in \mathbb{R}$
- Multipl. von Tensoren:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{B}} \longrightarrow C_{ij} = A_{ik}\, B_{kj}$$

$$\underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{A}}$$

- Inverser Tensor $\underline{\underline{T}}^{-1}$ mit $\underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{1}} \rightarrow T_{ik} \left(\underline{\underline{T}}^{-1}\right)_{kj} = \delta_{ij}$
- Spurbildung $Sp\, \underline{\underline{T}} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$

(2.25)