3. Hydrodynamik Newtonscher Flüssigkeiten

3.1 Kinematik

a) materielle ($\underset{\sim}{\xi}$) und räumliche ($\underline{x}$) Koordinaten:

Bewegung:
Deformation: $\underline{x} = \underline{x}(\underset{\sim}{\xi}, t)$

indiziert
Pkt. P des Kontinuums

b) Konvektionsformel

- beliebiges Feld: $\varphi(\underline{x}, t) = \varphi(\underline{x}(\underset{\sim}{\xi}, t), t) = \varphi(\underset{\sim}{\xi}, t)$ (3.1)

… „physikal. Konvention" für Funktionen

- Zeitableitungen:

(i) $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{x}, t)$ … lokale Zeitableitung ($\hat{=}$ zeitl. Ändg am Ort $\underline{x}$)

(ii) $$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underset{\sim}{\xi}, t) \equiv \frac{d}{dt}\varphi(\underline{x}, t)}$$ (3.2) … materielle oder substantielle Zeitableitung ($\hat{=}$ zeitl. Ändg im Punkt P, im bewegten Flüssigkeitsvolumen)

$$= \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{x}, t) + [\nabla_i \varphi(\underline{x}, t)] \underbrace{\frac{\partial x_i(\underset{\sim}{\xi}, t)}{\partial t}}_{v_i(\underline{x}, t)}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\varphi} \quad (3.3)$$ … Konvektionsformel

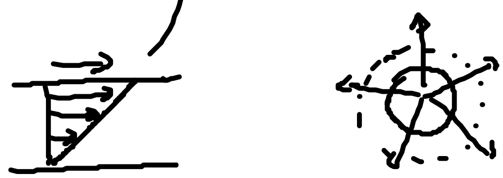
Lokale Zeitabl.

Konvektionsterm
- ableitung

Bsp: $\frac{d\varphi}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \underbrace{-\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\varphi}_{\text{Lokale zeitl. Änderung aufgrund Strömung}}$

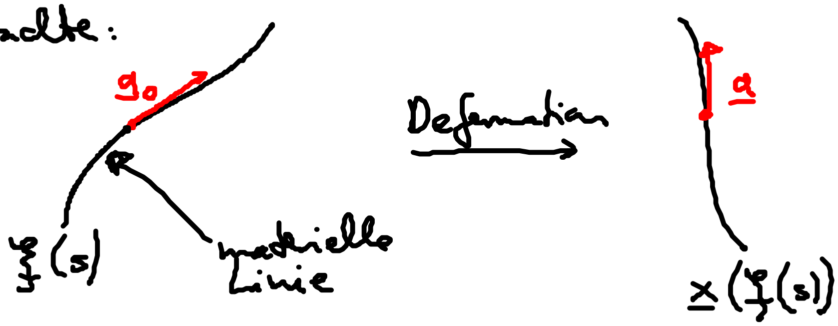
c) Deformationsrate

• Ziel: Variable, die Scherung / Dilatation, Kompression von Flüssigkeit erfasst



(i) Geschwindigkeitsgradient:

• Betrachte:



Tangentialvektor
$\underline{a}_0 = \frac{\partial}{\partial s}\underline{\xi}(s) \longrightarrow \underline{a} = \frac{\partial}{\partial s}\underline{x}(\underline{\xi}(s))$ mit $a_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\underbrace{\frac{\partial \xi_j}{\partial s}}_{[a_0]_j}$ (3.4)

• Führe ein:

$$\boxed{\underline{\underline{F}} \text{ mit } F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}} \quad (3.5)$$

... Jacobische Matrix

also: (3.4) $\boxed{\underline{a} = \underline{\underline{F}}\,\underline{a}_0}$ (3.6)

• Betrachte:

$$\frac{d}{dt}\underline{a} \overset{(3.5)}{=} \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial t}\underline{a}_0$$

$$\overset{(3.6)}{=} \underbrace{\frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial t}\underline{\underline{F}}^{-1}}_{\underline{\underline{L}}}\underline{a} \qquad \text{mit } (\underline{\underline{F}}^{-1})_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \quad (\text{o.B.})$$

$\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{x}, t)$

in Komponenten

$$L_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right)\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} x_i\right)}_{v_i}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nabla_j v_i$$

also:
$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\underline{a} = \underline{\underline{L}}\,\underline{a} \\ &\text{mit } L_{ij} = \nabla_j v_i \end{aligned}} \qquad (3.7)$$

... Geschwindigkeitsgradient

- Zerlegung:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{L}} &= \tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^t\right) + \tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^t\right) \\ &= \qquad \underline{\underline{A}} \qquad + \qquad \underline{\underline{W}} \end{aligned}} \qquad (3.8)$$

$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j\right)$ ... Deformationsrate = Verzerrungsgeschw. tensor

$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j\right)$ .... Drehgeschw. tensor

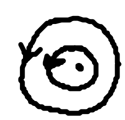
(ii) Bedeutung von $\underline{\underline{W}}$:

- $\underline{\underline{W}}$ ist antisymmetrisch: $\underline{\underline{W}} = \begin{pmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ -W_{12} & 0 & W_{23} \\ -W_{13} & -W_{23} & 0 \end{pmatrix}$

- Führe ein:

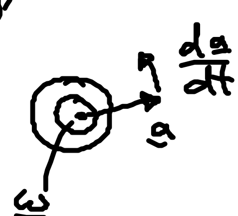
$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\omega} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\underline{v} \\ \text{mit} \quad &\omega_i = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\nabla_j v_k = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W_{jk} \end{aligned}} \qquad (3.9)$$

... Drehvektor
Vortex in Flüssigkeit
(Verwirbelung)



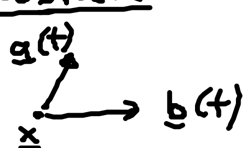
denn es gilt: $\boxed{\underline{\underline{W}}\,\underline{a} = \underline{\omega} \times \underline{a}}$ (3.10) ... Drehung von $\underline{a}$

Beweis: selber



(iii) Deformationsrate

- Betrachte:



• zeitliche Änderung von $\underline{a}\cdot\underline{b}$?

$$\frac{d}{dt}(\underline{a}\cdot\underline{b}) = \dot{\underline{a}}\cdot\underline{b} + \underline{a}\cdot\dot{\underline{b}} \overset{(3.7)}{=} \underline{\underline{L}}\,\underline{a}\cdot\underline{b} + \underline{a}\cdot\underline{\underline{L}}\,\underline{b}$$

$$= \underline{a}\cdot(\underline{\underline{L}}+\underline{\underline{L}}^t)\,\underline{b}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\underline{a}\cdot\underline{b}) \overset{(3.8)}{=} 2\,\underline{a}\cdot\underline{\underline{A}}\,\underline{b}} \qquad (3.11)$$

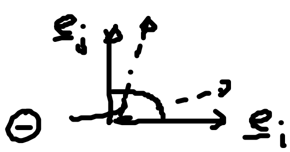
• Interpretation von $\underline{\underline{A}}$: mit $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ ... Koordinatenbasis

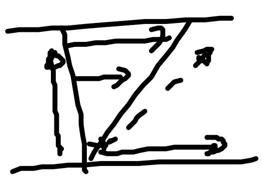
(1) $\underline{a} = \underline{b} = \alpha\,\underline{e}_i \xrightarrow{(3.11)} 2\alpha\dot{\alpha} = 2\alpha^2 A_{ii}$

$$\longrightarrow \boxed{A_{ii} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}} \qquad (3.12)$$

... relative Dehngeschwindigkeit von Längen entlang $\underline{e}_i$

(2) $\underline{a} = \underline{e}_i$, $\underline{b} = \underline{e}_j \xrightarrow{(3.11)}$ $\underbrace{\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{|\underline{e}_i|}_{=1}\underbrace{|\underline{e}_j|}_{1}\cos\theta\Big)}_{-\sin\theta\,\dot{\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}}}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2A_{ij}$





$$\longrightarrow \boxed{A_{ij} = -\frac{1}{2}\dot{\theta}} \qquad (3.13) \quad i \neq j$$

... halbe Änderungsgeschwindigkeit rechter Winkel = <u>Scherrate</u>

(3) Kompressionsrate:

Quadervolumen: $V = abc$

Betrachte: $\frac{\dot{V}}{V} = \frac{(abc)^{\cdot}}{abc} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = \underbrace{A_{11} + A_{22} + A_{33}}_{Sp\,\underline{\underline{A}}} = \nabla_1 v_1 + \nabla_2 v_2 + \nabla_3 v_3$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\dot{V}}{V} = \mathrm{div}\,\underline{v} = Sp\,\underline{\underline{A}}} \qquad (3.14)$$

Kompressionsrate/-geschw.
Dilatationsrate/-geschw.

3.2 Einordnung: hydrodynamische Variable

- **Ges:** Bewegungsgleichungen für Kontinua, insbes. zähe Flüssigkeit
- jedes System: aufgebaut durch Atome: Kollisionen mit mittlerer stoßfreier Zeit τ_c

  $\longrightarrow$ lokales therm. GG $\hat{=}$ Thermodynamik lokal anwendbar
- **hier:** Dynamik von Kontinua auf Längenskala $\gg$ Atomabstände

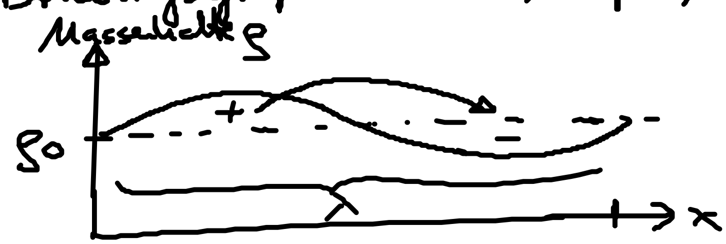
  " " " " Zeiten $\tau_H \gg \tau_c$

also: langsame kollektive Dynamik

$\longrightarrow$ hydrodynamische Variable

(1) Erhaltungsgrößen: Masse, Impuls, Energie

Grd:

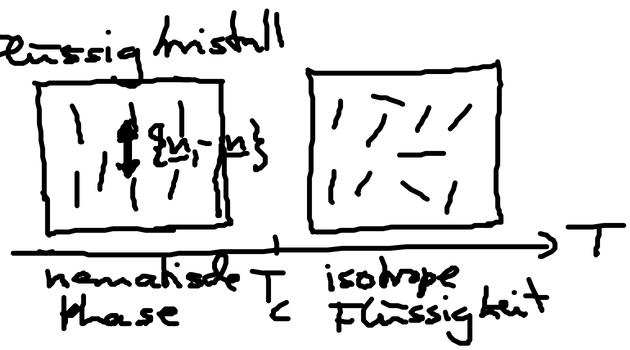


Ausgleich der Inhomogenität auf Zeiten $\tau \longrightarrow \infty$ für $\lambda \longrightarrow \infty$

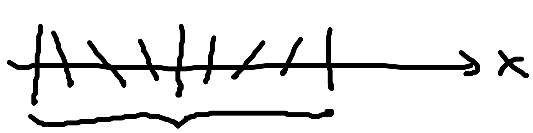
(2) Variable, die gebrochene kontinuierliche Symmetrien beschreiben

Bsp: Flüssigkristall

$\underline{n}$ ... Direktor



elastische Deformation



$\boxed{\text{Relaxationszeit } \tau \longrightarrow \infty \text{ für } \lambda \to \infty}$

Grd: Rotation gesamtes Systems

λ

[elast. Energie $F = K \int d^3r \, (\nabla n)^2$]