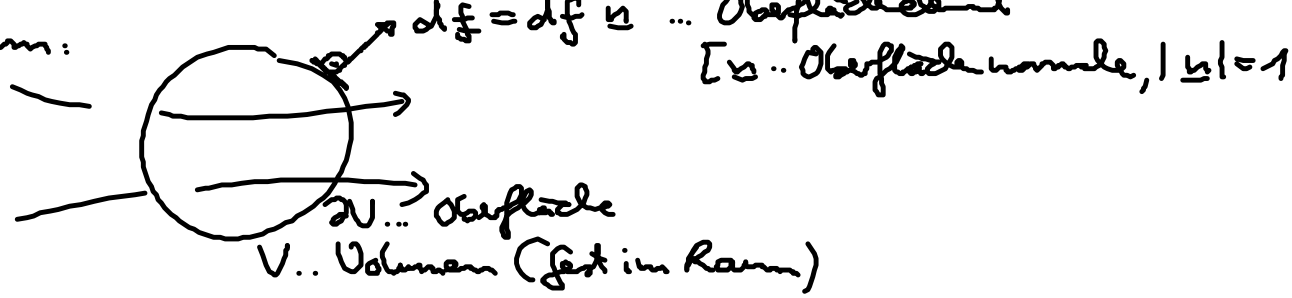
3.3 Massebilanz

- Kontinuum:



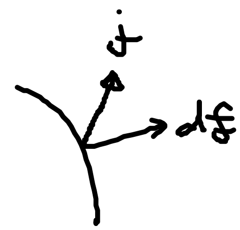
- Gesamtmasse:

$$M(t) = \int_V \rho(\underline{x},t)\, d^3x$$

ρ ... Massendichte

- Massenerhaltung:

$$\frac{dM}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{x},t)\, d^3x = -\underbrace{\int_{\partial V} \underline{j}(\underline{x},t)\cdot d\underline{f}}_{\substack{\text{Masse, die durch} \\ \text{die Oberfläche aus-} \\ \text{fließt pro Zeiteinheit} \\ \text{(s.u.)}}} \overset{\text{Gauss}}{=} -\int \mathrm{div}\,\underline{j}\, d^3x$$

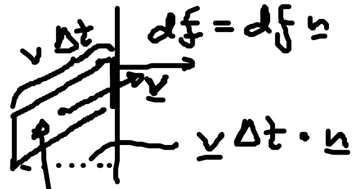


V beliebig $\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\underline{j} = 0}$ (3.15a)

... Kontinuitätsgleichung
Erhaltungssatz für Masse

mit $\boxed{\underline{j} = \rho\,\underline{v} \text{ ... Massenstromdichte} \\ = \text{Dichte Erhaltungsgröße} \times \text{Geschw.}}$ (3.15b)

„Beweis":



Masse durch Fläche df in Zeit Δt

$$\rho\,\Delta V = \rho\,\underline{v}\Delta t\cdot d\underline{f} \longrightarrow \frac{\rho\,\Delta V}{\Delta t} = \underbrace{\rho\,\underline{v}}_{\underline{j}}\cdot d\underline{f}$$

$$\Delta V:\quad \rho\,df\,\underline{v}\Delta t\cdot\underline{n}$$

- (3.15a) ... gültig für alle Erhaltungsgrößen

  (3.15b) ... „konvektiver" Anteil von $\underline{j}$

- inkompressible Flüssigkeiten: $\frac{d\rho}{dt} = 0$ (3.17)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\rho = \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{v})}_{=0\ (3.15)} - \rho\,\underline{\nabla}\cdot\underline{v} \longrightarrow \boxed{\operatorname{div}\underline{v} = 0} \quad (3.16)$$

- Hilfsformel:

Geg: physikal. Größe $= \int \rho\,\phi\,d^3x = \int \phi\,\underbrace{dm}_{\text{Masseelement}}$

Felder:

$\rho\phi$ ... Volumendichte = Größe pro Volumeneinheit

ϕ ... spezifische Größe = " " Masseneinheit

dann gilt: $$\frac{\partial\rho\phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\phi\underline{v}) = \rho\frac{d\phi}{dt} \quad (3.17)$$

Beweis: $$\underline{\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}} + \underline{\phi\frac{\partial\rho}{\partial t}} + \underline{\rho\,\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\phi} + \underline{\phi\,\operatorname{div}(\rho\underline{v})}$$
$= 0$ (3.15)

Bsp: (i) Massendichte: $\phi = 1$

(ii) thermodynam. Potentiale:

spezifische innere Energie u

" Entropie s

(iii) Impulsdichte: $\rho\underline{v} \longrightarrow \phi = v_i$ (s. Kap. 3.4)

3.4. Impulsbilanz

- Gesamtimpuls: $\underline{P}(t) = \underbrace{\int_V \rho(\underline{x},t)\, \underbrace{\underline{v}(\underline{x},t)}_{\text{Geschw. von Vol.element } d^3x}}_{\text{Impulsdichte}} d^3x$

- Newton (2. Axiom)

$$\frac{d\underline{P}}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v})\, d^3x = -\underbrace{\int_{\partial V} \underline{\underline{j}}^{(p)}\, d\underline{f}}_{\substack{\text{Impulsstrom}\\ \text{(konvektiver}\\ \text{Anteil)}}} + \underbrace{\int \rho \underline{b}\, d^3x}_{\substack{\text{Volumen-}\\ \text{kräfte}}} + \underbrace{\int_{\partial V} \underline{t}(\underline{x},\underline{n},t)\, df}_{\text{Oberflächenkräfte}}$$

a) Impulsstromdichte: (konvektiver Anteil)

- $\underline{\underline{j}}^{(p)}$ ... Tensor 2. Stufe! [Strom für Vektor $\rho \underline{v}$]

(3.15b) $\boxed{j^{(p)}_{ij} = \underbrace{\rho v_i}_{\text{Impulsdichte}} \times \underbrace{v_j}_{\text{Geschw.}}}$ (3.19a)

$$\boxed{\underline{\underline{j}}^{p} = \rho\, \underline{v} \otimes \underline{v}}$$

b) Volumenkräfte

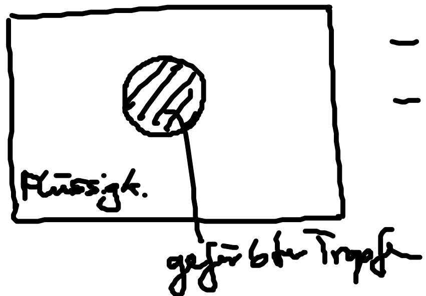
- $\rho \underline{b}$ .. Volumenkraftdichte
  $\underline{b}$ ... Massenkraftdichte

- Bsp: externe Felder: Gravitation: $\underline{b} = \underline{g}$
  [greifen lokal an d^3x an!] elektr./magnet. Felder

c) Oberflächenkräfte, Spannungstensor

· Ursprung: kurzreichweitige Ww:

Bsp:



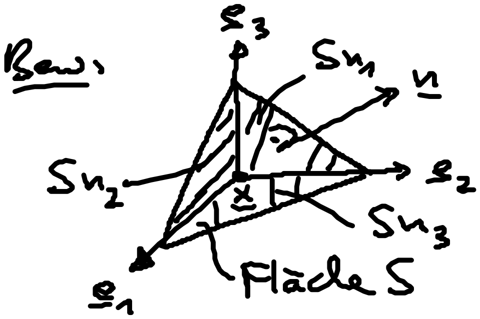
– Druckkräfte
– Reibung zwischen Flüssigkeitsschichten

· Beh.:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{t}(\underline{x},\underline{n}) &= \underline{\underline{T}}(\underline{x})\,\underline{n} \\ t_i &= T_{ij}\, n_j \end{aligned}} \qquad (3.19b)$$

$\underline{\underline{T}}$ ... Spannungstensor

Bew.:



irregulärer Tetraeder

Volumen: $\frac{1}{3} h S$

Höhe, Grundfläche

Impulsbilanz für $S, h \longrightarrow 0$ $\quad \left[\text{mit } \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + \operatorname{div} \underset{\rho \underline{v} \otimes \underline{v}}{\underline{\underline{j}}}{}^{p} = \rho \frac{d\underline{v}}{dt}\right]$

$$S\left[\underline{t}(\underline{x},\underline{n}) + \left(\sum_{i=1}^{3}\right) n_i\, \underline{t}(\underline{x}, -\underline{e}_i)\right] + \frac{1}{3} h S \rho \left[\underline{b} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right] = 0$$

$$\lim_{h\to 0} (\ldots) \longrightarrow \underline{t}(\underline{x}\,\underline{n}) = -\underline{t}(\underline{x}, -\underline{e}_i)\, n_i$$

$$\overset{\text{actio=}}{\underset{\text{reactio}}{=}} \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_i)\, n_i$$

bzw in Komp. $i \to j$

$$t_i(\underline{x},\underline{n}) = \underbrace{t_i(\underline{x}, \underline{e}_j)}_{T_{ij}}\, n_j \qquad \text{qed}$$

· damit

$$\int \underline{t}(\underline{x},\underline{n})\, df = \int \underline{\underline{T}}\, d\underline{f} = \int \operatorname{div} \underline{\underline{T}}\, d^3x \qquad (3.20)$$

$$\left[\int t_i\, df = \int T_{ij}\, df_j = \int \nabla_j T_{ij}\, d^3x\right]$$

· Verdeutlichung:

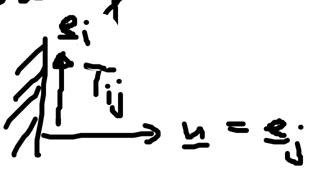
$$\boxed{T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j}$$

... i-te Komponente des Spannungsvektors $\underline{t} = \underline{\underline{T}}\,\underline{n}$
für Normale $\underline{n} = \underline{e}_j$

(1) Normalspannungen: $i = j$

Diagonalelemente: Spannungskräfte $\parallel \underline{n} = \underline{e}_j$

(2) Schubspannungen: $i \neq j$



Nichtdiagonalelemente: Spannungskräfte $\perp \underline{n} = \underline{e}_j$

(3) $\underline{\underline{T}}$ symmetrisch (s.u.) $\longrightarrow$ Diagonalisierung

$$\boxed{\underline{\underline{T}}\, \underline{\eta}^{(i)} = \lambda^{(i)} \underline{\eta}^{(i)}}$$

Hauptspannungsrichtungen

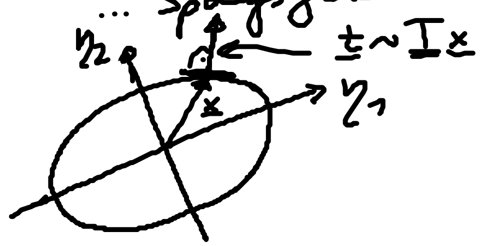
Hauptspannungen $\parallel \underline{\eta}^{(i)}$

im EV-System: $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & & 0 \\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)} \end{pmatrix} \Longrightarrow$ __keine__ Schubspannungen $\perp \underline{\eta}^{(i)}$

· Poinsotsche Konstruktion:

$$\boxed{\underline{x} \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{x} = \text{konst.}}$$

... Spannungsfläche = Bilinearform



$\underline{t} \perp$ Tangentialebene an Spannungsfläche

d) __Impulsbilanz__:

· Newton (3.19), $\int \underline{\underline{j}}^{(p)} d\underline{f} = \int \mathrm{div}\, \underbrace{\underline{\underline{j}}^{(p)}}_{\rho \underline{v} \otimes \underline{v}} d^3x$ (3.20) & V beliebig kanonische Form:

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \mathrm{div}\underbrace{(\rho \underline{v} \otimes \underline{v} - \underline{\underline{T}})}_{\text{Impulsstrom-dichte}} = \underbrace{\rho \underline{b}}_{\text{Quellterm}}} \quad (3.21)$$

NB: Kontinuitätsgleichung für $\rho \underline{v}$ & Quellterm

- Umschreibung:

mit $\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla_j(\rho v_i v_j) = [\ldots] = \rho \frac{d}{dt} v_i$

ϕ in (3.17)   (3.17)

folgt aus (3.21)

$$\boxed{\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\, \underline{v}\right) = \mathrm{div}\, \underline{\underline{T}} + \rho \underline{b}} \quad (3.22)$$