

3.6 Energiebilanz = 1. Hauptsatz der Thermodynamik

• Gesamtenergie:
$$E = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) e(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (3.31)$$

$$= \int_V \rho(\mathbf{x}, t) \left[\frac{1}{2} v^2(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x}, t) \right] d^3x$$

$e \dots$ spezifische Gesamtenergie / G. Energie pro Masseneinheit
 $u \dots$ " innere Energie / innere Energie "

• 1. Hauptsatz: [vgl: $dU = dQ + dW_{\text{mech}}$]

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) d^3x \quad (3.32)$$

$$= - \int_V \underbrace{\rho e v}_{\substack{\text{Energiesam-} \\ \text{dichte} \\ \text{(konvektiver} \\ \text{Anteil)}}} \cdot d\mathbf{f} - \int_V \underbrace{q}_{\substack{q \dots \text{Wärmestandichte} \\ r_w \dots \text{Wärmeerzeugung} \\ \text{pro Masseneinheit}}} \cdot d\mathbf{f} + \int_V \underbrace{\rho v_w}_{\substack{V \text{ zugeführte Wärme} \\ \text{pro Zeiteinheit}}} d^3x + \underbrace{\int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d^3x + \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{I} d\mathbf{f}}_{\substack{\text{mechan. Leistung} \\ \text{von Volumen } (\rho \mathbf{b}) \\ \text{und Oberfläche Kräfte } (\mathbf{I})}}$$

• Umformung:

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{I} d\mathbf{f} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_V \text{div} (\mathbf{I}^t \mathbf{v}) d^3x$$

(3.32) \rightarrow Lagrange Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \right] + \text{div} \left[\underbrace{\rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \mathbf{v}}_{\text{konvektiv}} - \underbrace{\mathbf{I}^t \mathbf{v}}_{\text{innere Kräfte}} + \underbrace{q}_{\text{Wärmestrom}} \right] = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} + r_w) \quad (3.33)$$

Energiesam-dichte

NB: Kontinuitätsgleichung für ρe und Quellterme

• Umschreibung:

$$(i) \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \text{div}(\rho e \underline{v}) \stackrel{(3.27)}{=} \left[\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla e \right) \right] = \rho \frac{de}{dt}$$

$$\phi \quad e = \frac{v^2}{2} + u \quad = \rho \underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} + \rho \frac{du}{dt}$$

$$(ii) \text{div}(\underline{I}^T \underline{v}) = \nabla_i (\underbrace{T_{ji}}_{T_{ij}^T} v_j) = \underline{v} \cdot \text{div} \underline{I} + \underbrace{T_{ji} \nabla_i v_j}_{T_{ij}^T L_{ji}} = \text{Sp}(\underline{I}^T \underline{L})$$

Impulskilanz! $\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \text{div} \underline{I} + \rho \underline{b}$

(3.33) → (grüne Terme fallen weg)

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla u \right) = \underbrace{\text{Sp}(\underline{I}^T \underline{L})}_{\text{mechan. Leist. der inneren Kräfte}} - \underbrace{\text{div} \underline{q}}_{\text{Wärmefluss}} + \underbrace{\rho r_w}_{\text{Wärmquelle}} \quad (3.34)$$

3.7 2. Hauptsatz der Thermodynamik

• hilft bei Aussagen über Materialgesetz für \underline{I} , \underline{q}

• homogenes System: $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$
 irreversible Prozesse
 reversible Prozesse

• Kontinua:

$$S = \int \rho s d^3x$$

s ... spezifische Entropie / Entropie pro Masseneinheit

2.H.S:

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) d^3x \geq - \int_V \underbrace{\left(\rho \underline{s} \underline{v} + \frac{\underline{q}}{T} \right)}_{\text{Entropiestandlicht}} \cdot d\underline{f} + \int_V \frac{\rho r_w}{T} d^3x \quad (3.35)$$

Quelle

Gauss!

$$\rightarrow G := \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \operatorname{div} (\rho s \underline{v} + \underline{q}) - \frac{\rho r_w}{T} \geq 0 \quad (3.36)$$

bzw
mit (3.17) $TG = T \rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \underline{q} - \frac{1}{T} \underline{q} \cdot \nabla T - \rho r_w \geq 0$

... Clausius-Duhem-Gl.

Bedeutung: (i) reversible Prozesse: $G = 0$
 (ii) irreversible Prozesse: $G > 0$

G ... Entropieproduktionsrate pro Volumeneinheit
 für dissipative Vorgänge im System

• Umschreibung:

(i) Kontrollgröße $T \rightarrow$ führe ein: $f = u - Ts$ (3.37)
 ... spezifische freie Energie

(ii) verwende Erhaltungssätze:

mit 1. HS (3.34) $[\rho r_w - \operatorname{div} \underline{q} = \rho \frac{du}{dt} - \rho p (\underline{I}^+ \underline{L})]$ in (3.36)

$$TG = -\rho \left(\frac{du}{dt} - T \frac{ds}{dt} \right) + \rho p (\underline{I}^+ \underline{L}) - \frac{1}{T} \underline{q} \cdot \nabla T \geq 0$$

$$\rightarrow TG = -\rho \left(\frac{df}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) + \rho p (\underline{I}^+ \underline{L}) - \frac{1}{T} \underline{q} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (3.38)$$

mit $\frac{df}{dt} = \frac{du}{dt} - s \frac{dT}{dt} - T \frac{ds}{dt}$

3.8 Die Newtonsche Flüssigkeit

a) erste Aussagen über isotherme Flüssigkeit:

• Annahme: $f = f(T, p)$

$$\left[p = - \frac{\partial f}{\partial v} \right]$$

$$\rightarrow \text{Druck: } p = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \quad (3.39)$$

$$\text{spez. Entropie: } s = - \frac{\partial f}{\partial T}$$

Beweis: s. Übung

• Umfang von (3.38): $\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}$

$$TG = -\rho(\dot{f} + s\dot{T}) + \rho_p \underline{I}^t \underline{L} - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T \geq 0 \quad (3.38)$$

mit (i) $\underline{I}^t = \underline{I}$: $\rho_p \underline{I}^t \underline{L} \rightarrow \rho_p \underline{I} \underline{A}$

[Es war: $L_{ij} = \nabla_j v_i$, $A_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)$]

(ii) Zerlegung: $\underline{I} = \underline{I}^0 + \underline{I}' \quad (3.40)$

statistischer Anteil: $\underline{I}^0 = -p \underline{1} \quad (3.41)$
 $\rightarrow \underline{I} d\mathbf{f} = -p d\mathbf{f}$

Grund: keine Schusspange $\perp d\mathbf{f}$

$\rightarrow \underline{I} \sim \underline{1}$, $p \dots$ Druck (s.u.)

dissipativer Anteil: \underline{I}' (s.u.)

damit: $\rho_p \underline{I} \underline{A} = \rho_p [(-p \underline{1} + \underline{I}') \underline{A}]$
 $= -p \underbrace{\rho_p \underline{A}}_{-p \operatorname{div} v} + \rho_p (\underline{I}' \underline{A})$

$[\dot{g} + \rho \operatorname{div} v = 0] = \underline{\underline{\rho}} \dot{g} + \rho_p (\underline{I}' \underline{A})$

(iii) $\dot{f} = \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial T}}} \dot{T} + \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial g}}} \dot{g}$

$\xrightarrow{\text{in (2.38)}} TG = -\rho \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial T} + s\right)}_{(1)} \dot{T} - \underbrace{\left(\rho \frac{\partial f}{\partial g} - \underline{\underline{\rho}}\right)}_{(2)} \dot{g} + \rho_p \underline{I}' \underline{A} - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T \geq 0 \quad (3.42)$

Argumentation: \dot{T} , \dot{g} frei präparierbar

$\rightarrow (1) = 0 \quad \stackrel{!}{=} \text{Gl. (3.39)}$

$\rightarrow (2) = 0 \quad \xrightarrow{(3.39)} p \text{ in } \underline{I}^{(0)} \text{ ist Druck!}$

→ Entropieproduktionsrate pro Volumeneinheit:

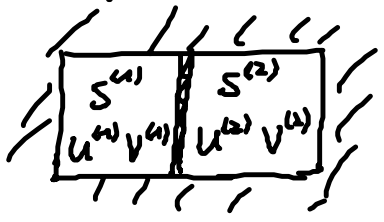
$$\sigma_G = \underbrace{\rho \mathbf{I}' \cdot \underline{\mathbf{A}}}_{\text{Dissipation bei mechan. Arbeit}} - \underbrace{\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T}_{\text{Dissipation durch Wärmefluss}} \geq 0 \quad (3.43)$$

Dissipation bei mechan. Arbeit
Dissipation durch Wärmefluss

• Deutung:

(3.43) → $G = \rho \frac{\mathbf{I}'}{T} \cdot \underline{\mathbf{A}} + \mathbf{q} \cdot \nabla \frac{1}{T}$

(i) Vgl. Thermodynamik



Gesamtentropie: $S = S^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}) + S^{(2)}(U^{(2)}, V^{(2)})$

Wärme durch löslige, bewegliche Wand:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \underbrace{\left(\frac{1}{T^{(1)}} - \frac{1}{T^{(2)}} \right)}_{\substack{\equiv \text{Temp.} \\ \text{gradient}}} \underbrace{\frac{\Delta U^{(1)}}{\Delta t}}_{\substack{\equiv q}} + \underbrace{\left(\frac{p^{(1)}}{T^{(1)}} - \frac{p^{(2)}}{T^{(2)}} \right)}_{\substack{\equiv \frac{\mathbf{I}'}{T}}} \underbrace{\frac{\Delta V^{(1)}}{\Delta t}}_{\substack{\equiv \underline{\mathbf{A}}}} \geq 0$$

$\Delta V^{(1)} + \Delta V^{(2)} = 0$
 $\Delta U^{(1)} + \Delta U^{(2)} = 0$

(ii) Deutung durch Hydrodynamik:

$\frac{\mathbf{I}'}{T}$	} Fluß Stromdichte	von Erhaltungsgrößen	$\left\{ \begin{matrix} \rho v \\ e \end{matrix} \right.$
\mathbf{q}			
$\frac{\underline{\mathbf{A}}}{T}$	} generalisierte Kraft = Gradient der zur Erhaltungsgröße	$\left\{ \begin{matrix} \rho v \\ e \end{matrix} \right.$	} conjugierte thermodynam Variablen
$\nabla \frac{1}{T}$			

(3.44)