

3.12 Ausbreitung von Störungen für konstante Temperatur

a) Wirbel:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0} \nabla^2 \right) \text{rot } \underline{v} = \text{rot } \underline{b} \quad (3.72)$$

... Diffusionsagl. für Wirbel/Vortizität

• Greensche Fkt.:

$$\text{rot } \underline{b} = \delta(\underline{x} - \underline{x}_0) \delta(t) \hat{v}$$

$$\rightarrow \underline{G}(\underline{x} - \underline{x}_0, t) = \frac{\hat{v}}{(4\pi \frac{\eta}{\rho_0} t)^{3/2}} e^{-\frac{(\underline{x} - \underline{x}_0)^2}{4\eta/\rho_0 t}} \quad (3.73)$$

• Folgerung:

mittleres Verschiebungsquadrat des Wirbels

= mittleres Abstandsquadrat der Verwirbelung von \underline{x}_0

$$\langle (\underline{x} - \underline{x}_0)^2 \rangle = \int (\underline{x} - \underline{x}_0)^2 \underline{G}(\underline{x} - \underline{x}_0, t) d^3(\underline{x} - \underline{x}_0) = 6 \frac{\eta}{\rho_0} t$$

2x Raum-
dimension Diff. konst.

diffusive
Ausbreitung

Beweis: Übungen

hydrodynam. Zeitskala:

mit l_H ... charakt. Länge

$$\rightarrow \tau_H = \frac{l_H^2}{6\eta/\rho_0} \quad (3.76)$$

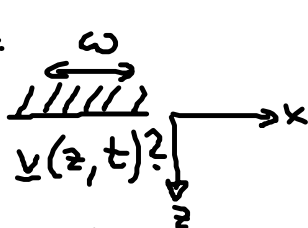
Bsp. $l_H^2 = (1 \mu\text{m})^2$, $\eta = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$, $\rho_0 = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$$\rightarrow \tau_H = 10^{-7} \text{ s} !$$

• planare Geometrie (1):

$$\text{rot } \underline{b} = \delta(\underline{z} - z_0) \delta(t) \hat{v} \leftrightarrow \underline{G}(\underline{z} - z_0, t) = \frac{\hat{v}}{\sqrt{4\pi \frac{\eta}{\rho_0} t}} e^{-\frac{(\underline{z} - z_0)^2}{4\eta/\rho_0 t}} \quad (3.77)$$

• planare Geometrie (2):



$$\underline{v} = v(z,t) \underline{e}_x \rightarrow \operatorname{div} \underline{v} = 0!, \quad \underline{b} = 0 \text{ in (3.62)}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nu}{g} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v(z,t) = 0 \quad (3.78)$$

Ansatz: $v(z,t) = v(\omega, z) e^{i\omega t}$ in (3.78)

$$\rightarrow \left(i\omega - \frac{\nu}{g} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v(\omega, z) = 0 \quad (3.79)$$

$$\rightarrow v(\omega, z) = v(\omega, 0) e^{-\sqrt{i\omega \frac{g}{\nu}} z}$$

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$v(\omega, z) = v(\omega, 0) e^{-\frac{(1+i)z}{\delta}}$$

exp. Abfall Oszillation

Eindringtiefe der Oszillation:

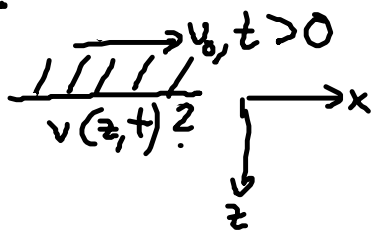
$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega g}} \quad (3.81)$$

$$\delta \rightarrow \infty, \quad \omega \rightarrow 0 \quad !!$$

$$\delta \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty \quad !!$$

• planare Geometrie (3):

$$\underline{v} = v(z,t) \underline{e}_x$$



Randbed.:

$$(1) v(0,t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ v_0, & t > 0 \end{cases}$$

$$(2) v(z,0) = 0, \quad z > 0$$

Lsg.: Superpositionsprinzip! ← Lsg. von (3.78) für $z \neq z_0$

$$v(z,t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \underbrace{2\Theta(-z_0)}_{\text{Stufenfunktion}} G(z-z_0, t) \quad (3.82)$$

↳ Stufenfunktion: $\Theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$

[Überlagerung 1D Punktquellen bei $z_0 < 0$]

denn: erfüllt Randbed.

$$v(0,t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \underbrace{2\Theta(z_0)}_{=1} G(-z_0, t) \stackrel{z > 0}{=} v_0 \quad \checkmark$$

- Normierung von Θ (3.74)
- Symmetrie bzgl. $z_0=0$

$$v(z,0) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 2\Theta(-z_0) \delta(z-z_0) = v_0 2\Theta(-z) \quad \checkmark$$

also: $v(z,t) \stackrel{(3.82)}{=} 2v_0 \int_{-\infty}^0 \underbrace{G(z-z_0, t)}_{= \frac{1}{\sqrt{4\pi \frac{\gamma}{S_0} t}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\gamma/S_0 t}}}$

$$u = \frac{z-z_0}{\sqrt{4\frac{\gamma}{S_0} t}}$$

$$du = -\frac{dz_0}{\sqrt{4\frac{\gamma}{S_0} t}}$$

$$v(z,t) = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z}{\sqrt{4\frac{\gamma}{S_0} t}}}^{\infty} e^{-u^2} du \quad (3.84)$$

(1) $z \gg \sqrt{4\frac{\gamma}{S_0} t}$: $v(z,t) = 0$

(2) $z \ll \sqrt{4\frac{\gamma}{S_0} t}$: $v(z,t) = v_0$

→ v_0 bei z spürbar nach $\frac{z^2}{4\gamma/S_0} \approx \tau_H$!!

→ $\tau > \tau_H$... Gültigkeitsbereich für stationäres Geschw.-profil

• hydrodynamische Moden:

Transversalwellen: $\underline{v} = v(z,t) \underline{e}_x$ mit $v(z,t) = v(k,\omega) e^{-i\omega t + ikz}$



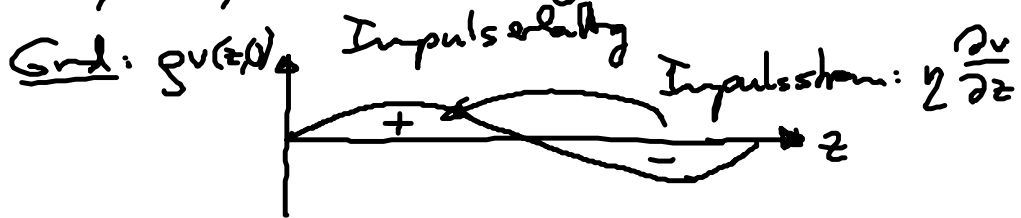
in (3.78) $(-\xi + \frac{\eta}{\rho_0} k^2) v(k,\omega) = 0$

→ $\xi(k) = \frac{\eta}{\rho_0} k^2$ (3.86)

... Dispersionsrelation für Schermoden
 ξ^{-1} ... Relaxationszeit für Welle e^{ikz}

$\xi \rightarrow 0$ für $k \rightarrow 0$!

„unendliche Lebensdauer“ für hydrodynam. Moden für $k \rightarrow 0$



b) Quellen:

$\text{div } \underline{v} \neq 0 \rightarrow \underline{v} = v(x,t) \underline{e}_x$... Longitudinalwelle = Schallwelle

Geschw.: $c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s \right)^{-1/2} \approx 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ für Flüssigkeit
 isentrope Kompressibilität

also: $1 \mu\text{m}$ in c^{-1} . $1 \mu\text{m} = 1 \text{ns}$!
 schneller als Schallwelle!

benötigt Masse-/Energiebilanz → Kap. 3.13

3.13 Hydrodynamische Moden

• Motivation:

5 Erhaltungssätze (Masse, Impuls, Energie)

→ 5 hydrodynam. Modi

• Weg: (i) linearisierte Bewegungsgln. (3.15), (3.62), (3.65)
um homogenen GG-Zustand:

$$\begin{array}{l} \rho \longrightarrow \rho + \delta\rho(x,t) \\ \quad \quad \quad v(x,t) \\ T \longrightarrow T + \delta T(x,t) \end{array} \quad (3.87)$$

statt innerer Energie!

(ii) homogener GG-Zustand: ρ, T

• erster Satz von Bew.gln.: mit $\underline{b}=0, v_w=0$

$$(3.15) \quad \rho \rightarrow \rho + \delta\rho \quad \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} v = 0 \quad (3.88)$$

$$(3.62) \quad \frac{v \cdot \nabla v \dots}{\text{nichtlinear}} \rightarrow \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p + \eta \nabla^2 v + (\eta + \zeta') \nabla \operatorname{div} v \quad (3.89)$$

$$(3.65) \quad \frac{v \cdot \nabla u}{\text{nichtl.}} \rightarrow \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -p \operatorname{div} v + \kappa \nabla^2 T \quad (3.90)$$

• Zerlegung:

$$v(x,t) = v_l(x,t) + v_t(x,t) \quad \text{mit } \operatorname{div} v_t = 0 \quad (3.91)$$

↑
longitudinaler
Anteil

↑
transversaler
Anteil

a) Transversalmoden

• Gleichg. für v_t : wegen $\operatorname{rot} \nabla p = 0$ und $\operatorname{div} v_t = 0$

$$(3.89) \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \right) v_t = 0 \quad (3.92)$$

• Schemode: s. Kap. 2.12 & keine Kopplg. an $\delta\rho, \delta T!$

$$v_t = v_t(k, \xi) e^{-\xi^2 + i k \cdot x}$$

$$\text{mit } v_t(k, \xi) \perp k \iff \operatorname{div} v_t = 0$$

in (9.2) \rightarrow $\boxed{\epsilon_{12}(k) = \frac{v}{c} k^2}$

... 2 Schermoden für

2 $v_{\perp}(k, \omega) \perp k!$

keine diffusive Moden (keine Propagation)

b) Longitudinalmoden:

• wichtige thermodynam. Relationen: s. Folie